

Mécanique du Vol

Olivier Gicquel

23 septembre 2020

Préambule

Ce polycopié est le support du cours de Mécanique du Vol de la mention Aéronautique-Espace-Transports, de CentraleSupélec. Le contenu du cours est une initiation à cette matière passionnante. Pour le lecteur qui souhaite approfondir ses connaissances dans le domaine de la Mécanique du Vol, il est conseillé de lire les ouvrages suivants :

- Bernard Etkin and Lloyd Duff Reid, "Dynamics of Flight Stability and Control", ISBN 0-471-03418-5
- Louis V. Schmidt, "Introduction to Aircraft Flight Dynamics", AIAA Education Series, ISBN 1-56347-226-0
- Thomas R. Yechout et al, "Introduction to Aircraft Flight Mechanics", AIAA Education Series, ISBN 1-56347-577-4
- Bandu N. Pamadi, "Performance, Stability, Dynamics, and Control of Airplanes Second Edition", AIAA Education Series, ISBN 1-56347-583-9
- L. George et al, "La mécanique du vol, performances des avions et des engins", Dunod 1969

Table des matières

1	Généralités et Conventions	1
1.1	Problème, Trièdres, Hypothèses	1
1.1.1	Bilan des forces agissant sur l'avion	1
1.1.2	Conditions générales du vol	1
1.2	Trièdres de références	1
1.2.1	Hypothèses utilisées	4
1.3	Notions d'altitude et de vitesse	5
1.3.1	L'atmosphère de référence : L'atmosphère standard	5
1.3.2	L'altitude	7
1.3.3	La vitesse	8
2	Performances	15
2.1	Introduction	15
2.2	Equation du vol dans le plan vertical	16
2.2.1	Hypothèses	16
2.2.2	Bilan des forces exercées sur l'avion	16
2.2.3	Les équations du mouvement	16
2.3	Le vol plané	19
2.3.1	Hypothèses	19
2.3.2	Bilan des forces exercées sur l'avion	19
2.3.3	Les équations du vol plané	19
2.3.4	La pente aérodynamique	21
2.3.5	Distance franchissable	22
2.3.6	Vitesse de chute (ou taux de chute)	22
2.3.7	L'endurance	23
2.4	Le vol horizontal	25
2.4.1	Hypothèses	25
2.4.2	Bilan des forces exercées sur l'avion	25
2.4.3	Equation du vol à l'équilibre	26
2.4.4	Les courbes "planeur"	27
2.4.5	Courbes "moteur"	30
2.4.6	Utilisation des courbes "planeur"/"moteur"	32
2.5	Vol en montée	37
2.5.1	Hypothèses	37
2.5.2	Bilan des forces exercées sur l'avion	38
2.5.3	Equation du vol en phase stationnaire	38

2.5.4	Grandeurs caractéristiques	39
2.5.5	Utilisation des diagrammes	41
2.5.6	Montée non-uniforme : Méthode de l'énergie totale	44
2.6	Vol en descente	49
2.6.1	Hypothèses	49
2.6.2	Bilan des forces exercées sur l'avion	50
2.6.3	Equation du vol en phase stationnaire	50
2.6.4	La vitesse de chute v'_z	51
2.6.5	La pente de descente γ	51
2.6.6	Utilisation des diagrammes	52
2.7	Facteur de charge	52
2.7.1	Virage parfait	52
2.7.2	Le virage dérapé	55
2.7.3	Le virage glissé	56
2.7.4	Le looping	56
2.7.5	L'arrondi	56
2.8	Rayon d'action	58
2.9	L'endurance	62
2.10	Décollage et atterrissage	63
2.10.1	Le décollage	63
2.10.2	L'atterrissage	66
3	Stabilité statique longitudinale	69
3.1	Moment aérodynamique longitudinal	69
3.2	Le centre de poussée aérodynamique	71
3.3	Le foyer	73
3.4	Notion de centrage : stabilité d'une aile volante	74
3.4.1	Cas du centrage avant :	74
3.4.2	Cas du centrage arrière :	74
3.4.3	Bilan sur la stabilité statique de l'avion	75
3.5	Test en vol de la stabilité : cas du manche bloqué	75
3.5.1	Action du manche pour un avion stable	77
3.5.2	Action du manche pour un avion instable	77
3.5.3	Action du manche pour un avion neutre	78
3.6	Test en vol de la stabilité : cas du manche libre	78
3.7	Cas du déplacement du foyer en vol	81
4	Equations du mouvement	83
4.1	Introduction	83
4.2	Les angles d'Euler	83
4.3	Equations du mouvement	85
4.4	Les équations linéarisées	86
4.5	Formulation matricielle	89
4.5.1	Système longitudinal	89
4.5.2	Système transversal	91
4.6	Liens avec les coefficients aérodynamiques adimensionnés	93

5	Dérivées de stabilité	99
5.1	Dérivées de stabilité longitudinales	99
5.1.1	Dérivées par rapport à u/V	99
5.1.2	Dérivées par rapport à α	101
5.1.3	Dérivées par rapport à q	103
5.1.4	Dérivées par rapport à $\dot{\alpha}$	105
5.2	Dérivées de stabilité transversales	106
5.2.1	Dérivées de stabilité dues à β	107
5.2.2	Dérivées de stabilité dues au moment de lacet, r	110
5.2.3	Dérivées de stabilité dues au moment de roulis, p	112
5.2.4	Dérivées de stabilité dues dues aux commandes latérales	114
6	Stabilité dynamique longitudinale	117
6.1	Cas de l'avion d'attaque A-4D	117
6.2	L'oscillation d'incidence	118
6.3	La Phugoïde	119
6.4	L'approximation de l'oscillation d'incidence	121
6.5	L'approximation phugoïde	124
7	Stabilité dynamique transversale	127
7.1	Le Roulis Hollandais	128
7.2	Le mouvement de roulis pur	129
7.3	Le mode Spirale	129
A	Atmosphère Standard	133
B	Caractéristiques des différents avions utilisés	137
B.1	Le Cessna Skylane	137
B.2	Le Cessna Citation 3	138
B.3	Le Douglas A4D Skyhawk, avion d'attaque de l'US Navy	139
B.4	Le McDonnell-Douglas F-4C Phantom II, avion de combat de l'US Air Force	141
B.5	Le McDonnell-Douglas DC-8	143
B.6	Le Lockheed JetStar	145

Chapitre 1

Généralités et Conventions

1.1 Position du problème, Trièdre de références, Hypothèses classiques

1.1.1 Bilan des forces agissant sur l'avion

- Forces de masses (pesanteur, forces d'inertie)
- Forces de surfaces (forces créées par le déplacement de l'air sur le fuselage, les ailes, les pièces mobiles ou fixes...)
 - forces de propulsions
 - forces aérodynamiques

Dans certains cas, il est nécessaire d'ajouter des forces considérées comme ponctuelles : roulage, catapultage, remorquage, freinage.

1.1.2 Conditions générales du vol

Les conditions générales de vol sont définies par les deux équations suivantes :

$$\sum F_{ext} = m\gamma \quad (1.1)$$

$$\sum M = 0 \quad (1.2)$$

1.2 Trièdres de références

Définitions

En mécanique du vol, il existe trois trièdres de référence.

- le trièdre lié à la terre (O, x_0, y_0, z_0)

Ce trièdre permet de décrire les mouvements de l'avion par rapport à la terre. La terre est supposée plane et l'axe O_{z_0} est orienté suivant la gravité.

- le trièdre aérodynamique (O, x_a, y_a, z_a)

Ce trièdre permet d'exprimer simplement les forces aérodynamiques. L'axe O_{x_a} est orienté suivant la vitesse. Il est défini positif vers l'avant. L'axe O_{z_a} est dans le plan de symétrie de l'avion choisi positif vers le dessous de l'avion.

— le trièdre avion (O, x, y, z)

Ce trièdre est lié à l'avion avec l'axe O_x suivant le fuselage positif vers l'avant et O_z positif vers le ventre de l'avion.

Positions relatives des différents repères

trièdre aéro/trièdre avion : L'angle α entre le trièdre aéro et le trièdre avion est appelé incidence. α est choisi positif quand O_x est au dessus de O_{x_a} (voir figure 1.1). L'angle β représente l'angle de dérapage. Il est positif si l'air souffle sur le coté droit de l'avion (voir figure 1.2).

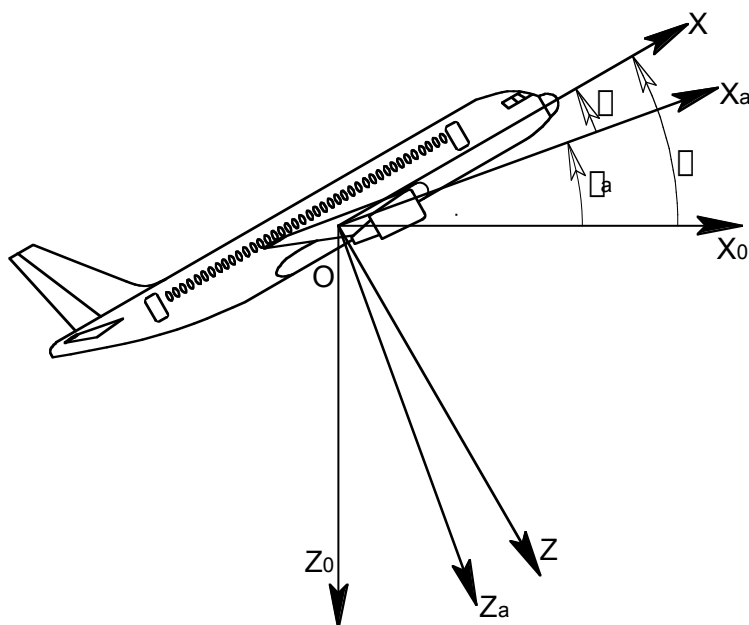


FIGURE 1.1 – Présentation des différents angles utilisés en mécanique du vol.

trièdre aéro/ trièdre terrestre γ_a est appelée "pente aérodynamique". Il est choisi comme la projection sur le plan Ox_0z_0 de l'angle fait par la vitesse (O_{x_a}) avec l'axe O_{x_0} . γ est choisi positif quand l'avion monte. (voir figure 1.2). L'azimut aérodynamique ψ_a est défini comme l'angle entre le plan vertical passant par V et l'axe O_{x_0} . Dans l'étude des performances de l'avion, nous ferons l'hypothèse d'un vol symétrique donc seul ψ est utile. En cas de vent, il faut différencier ψ et ψ_a et tenir compte de l'incidence du vent.

trièdre avion/ trièdre terrestre Les angles θ, ψ et ϕ définissent respectivement l'assiette longitudinale, l'azimut et l'angle de gîte.

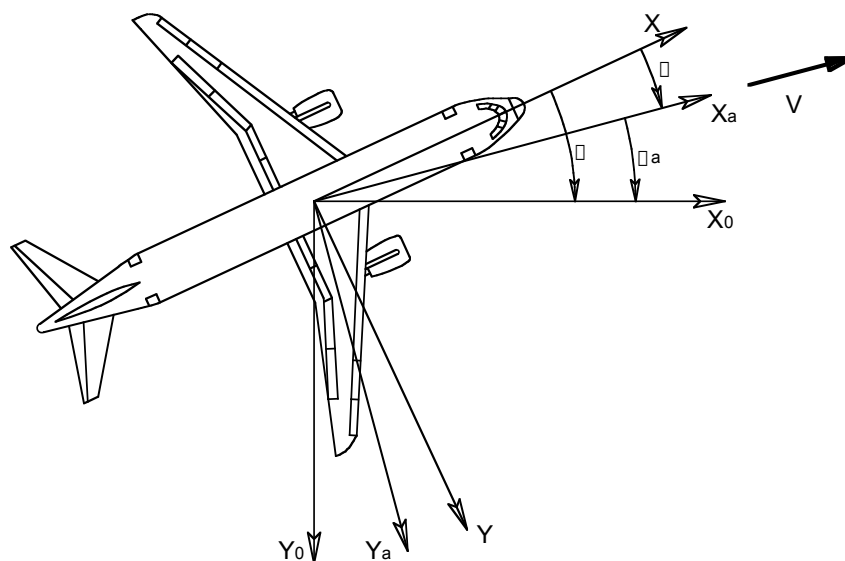


FIGURE 1.2 – Présentation des différents angles utilisés en mécanique du vol.

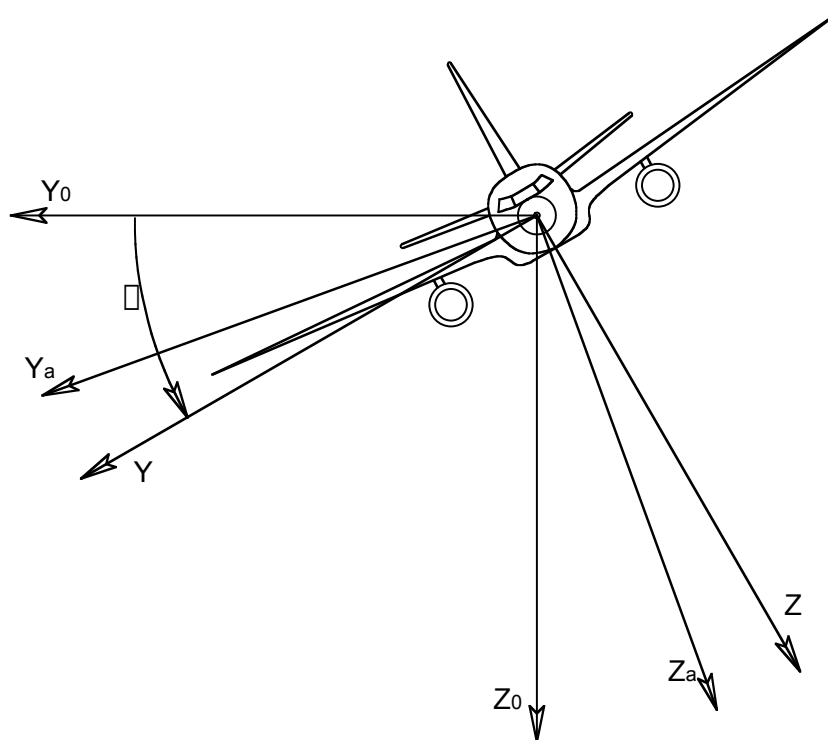


FIGURE 1.3 – Présentation des différents angles utilisés en mécanique du vol.

1.2.1 Hypothèses utilisées

- Nous choisissons de nous placer dans le cas d'un vol symétrique (dérapage nul). Les forces aérodynamiques n'ont donc aucune composante suivant l'axe O_{y_a} . Seules restent :
 - la traînée suivant O_{x_a} ,
 - la portance suivant O_{z_a} .
- Les forces aérodynamiques sont fonction de la vitesse de l'avion par rapport à l'air.
- Les forces d'inertie font intervenir le mouvement de l'avion par rapport au sol.
- Le vent est supposé nul (l'influence du vent est étudiée dans le cadre de la navigation aérienne).
- On néglige les courants ascendants.
- La poussée des propulseurs est parallèle à la vitesse donc ne participe pas de façon notable à la portance.

1.3 Notions d'altitude et de vitesse

Pour définir les performances d'un avion et pouvoir les comparer à celles d'autres avions, il est nécessaire de définir une atmosphère de référence. Celle-ci permet de relier une altitude donnée à la température et la pression qui lui sont associées. Les différentes lois régissant cette atmosphère ont été obtenues à l'aide de différents moyens de mesure tels que des ballons sondes (voir figure 1.4). La mise en commun de nombreux résultats a permis de tabuler l'ensemble des grandeurs caractérisant l'air en fonction de l'altitude. Cette définition reste cependant théorique et n'est que rarement représentative de la réalité.



FIGURE 1.4 – Exemple de lâcher d'un ballon sonde.

1.3.1 L'atmosphère de référence : L'atmosphère standard

Il existe plusieurs modèles d'atmosphère standard de part le monde. Nous allons ici nous limiter au modèle français (il est identique à celui utilisé par les Etats-Unis).

Définitions :

1. L'air est assimilé à un gaz parfait avec une constante massique $R = 287 \text{ J/kg.K}$.
2. L'air est sec.
3. L'atmosphère est au repos. La relation reliant la pression à l'altitude est alors :

$$dp = -\rho g(h)dh$$

où h est l'altitude par rapport au niveau de la mer. Il est possible de reformuler cette expression pour obtenir :

$$dp = -\rho g_0 dH \quad (1.3)$$

avec H l'altitude géopotentielle.

4. L'évolution de la température en fonction de l'altitude est la suivante :

entre 0 et 11 000 m :

$$T(K) = 288.15 + H * (216.65 - 288.15)/11000$$

entre 11 000 et 20 000 m :

$$T(K) = 216.65$$

entre 20 000 et 32 000 m :

$$T(K) = 216.65 + (H - 20000) * (228.65 - 216.65)/12000$$

entre 32 000 et 47 000 m :

$$T(K) = 228.65 + (H - 32000) * (270.65 - 228.65)/12000$$

L'évolution de la température en fonction de l'altitude est représentée sur la figure 1.5.

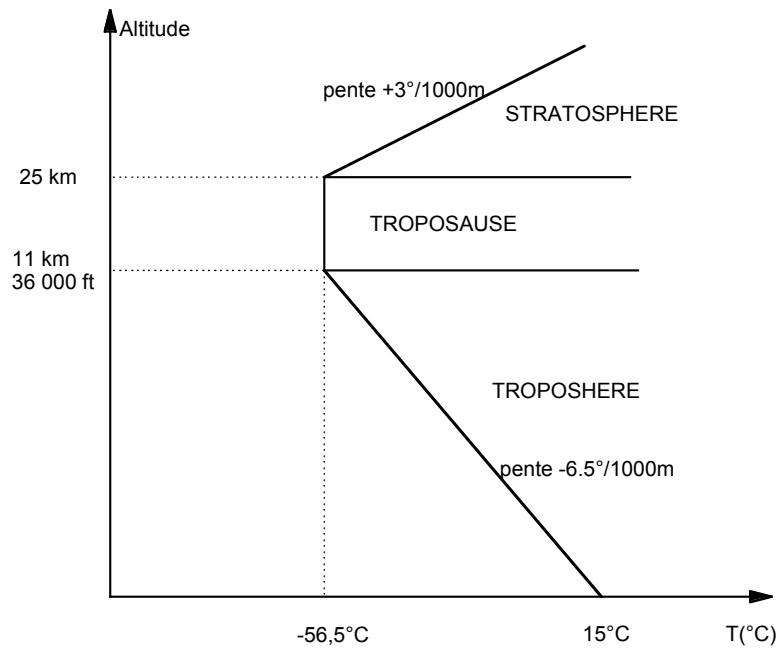


FIGURE 1.5 – Evolution de la température en fonction de l'altitude dans le cas de l'atmosphère standard.

Altitude de vol

En utilisant cette définition de l'atmosphère, il est possible de définir des altitudes de vol (flight level). Les avions sont répartis sur ces différentes altitudes de vol par le contrôle aérien. L'altitude de vol classique pour un avion de ligne est de 36 000 ft (FL 360). A partir de cette

altitude de référence les avions sont étagés tous les 1000 ft. Le Concorde quand à lui, volait à FL 600.

Evolution de la pression en fonction de l'altitude

En utilisant l'hypothèse d'atmosphère standard, il est possible de relier analytiquement la pression à l'altitude.

- entre 0 et 11 000 m :

$$P(Pa) = 101325(1 - 22.558 \cdot 10^{-6} H)^{5.256}$$
- entre 11 000 et 20 000 m :

$$P(Pa) = 22632e^{-157.7 \cdot 10^{-6}(H-11000)}$$
- entre 20 000 et 32 000 m :

$$P(Pa) = 5474.9[1 + 4.615 \cdot 10^{-6}(H - 20000)]^{34.163}$$
- entre 32 000 et 47 000 m :

$$P(Pa) = 868.014[1 + 12.245 \cdot 10^{-6}(H - 32000)]^{-12.2}$$

Evolution des grandeurs thermodynamiques en fonction de l'altitude

Dans le cadre de l'atmosphère standard on trouve :

- masse volumique : $\rho = p/rT$
- densité : $\sigma = \rho/\rho_0$
- Vitesse du son : $c = \sqrt{\gamma rT}$
- Viscosité : $\mu = \mu_0 * 0.083T\sqrt{T}/(T + 110.4)$
- Viscosité cinématique : $\nu = \mu/\rho$

avec $\rho_0 = 1.225 \text{ Kg/m}^3$, $\mu_0 = 17.82 \text{ USI}$, $r = 287 \text{ USI}$ et $\gamma = C_p/C_v = 1.4$

L'ensemble des formules présentées précédemment permet donc de définir complètement les caractéristiques locales de l'atmosphère en fonction de l'altitude. Cependant l'utilisation de ces formules s'avérant un peu fastidieuse, de nombreux abaques sont disponibles. Une table définissant l'atmosphère standard est disponible en annexe A.

Une formule empirique permet de calculer très simplement la densité de l'air en fonction de l'altitude :

$$\sigma = \frac{20 - Z}{20 + Z} \quad (1.4)$$

avec l'altitude Z exprimé en kilomètres, $P_0 = 101325 \text{ Pa}$ et $\rho_0 = 1.225 \text{ kg/m}^3$. Les résultats obtenus sont particulièrement satisfaisants pour les altitudes fréquentées par les avions de lignes.

1.3.2 L'altitude

Connaître exactement son altitude lorsque l'on est dans avion est, bien qu'étant quelque chose de particulièrement cruciale, assez difficile. Il existe, en effet, différentes définitions de l'altitude qui ne sont pas équivalentes :

- L'altitude géométrique, h : elle représente la distance entre le sol et l'avion. Elle est assez difficile à mesurer.

- L'altitude géopotentielle, H : elle est basée sur l'hypothèse d'atmosphère standard en supposant $g_0 = 9.806 \text{ ms}^{-2} = \text{cte}$. Elle est obtenue à partir de la pression locale et des formules définissant l'atmosphère standard.
- L'altitude pression : Elle correspond à une pression/hauteur. Si l'atmosphère est dans les conditions standards, elle est égale à l'altitude géopotentielle. L'atmosphère réelle n'étant que très rarement dans ces conditions, le pilote annonce une altitude qui n'est en fait qu'une pression. Ainsi un pilote annonçant une altitude de 11 000 m, annonce en réalité une altitude où règne une pression de 22 631 Pa.

Alt géopotentielle (m)	0	5000	11000	20000	47000
Alt géométrique (m)	0	5004	11019	20063	47350

TABLE 1.1 – Comparaison entre l'altitude géopotentielle et l'altitude géométrique

Il est important de réaliser que dans les phases de vol stationnaire, la connaissance exacte de l'altitude n'est pas primordiale. La seule chose qui soit réellement importante est de s'assurer que tous les avions volant au même endroit utilisent la même définition de l'altitude. En effet l'étagement des avions étant basé sur le FL 360, tous les avions se calent par rapport à ce niveau.

L'altitude annoncée par les pilotes est donc celle qu'ils lisent sur leur altimètre soit une altitude pression.

1.3.3 La vitesse

Technique pour mesurer la vitesse

Pour mesurer la vitesse de l'avion, différentes techniques sont disponibles, nous ne nous intéresserons ici qu'à la technique de référence : l'utilisation d'un tube de Pitot. Dans la plupart des avions, deux prises de pressions sont prévues : la première sert à mesurer la pression d'arrêt et la seconde la pression statique (Fig. 1.6). En reliant ces deux prises de pression à un manomètre différentiel il est possible de déterminer la vitesse de l'avion. Il est important de comprendre que

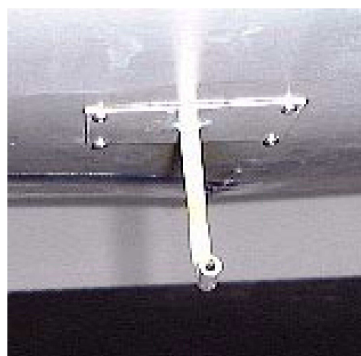


FIGURE 1.6 – Prise de pression d'arrêt située sous l'aile d'un avion de tourisme

cette technique mesure une différence de pression et non une vitesse. La vitesse n'est obtenue qu'en utilisant les relations mathématiques reliant la différence de pression et la vitesse. La

relation classique (Bernoulli) qui relie ces deux grandeurs est la suivante :

$$\Delta p = p_t - p = \rho V_\infty^2 / 2 \quad (1.5)$$

Cette relation n'est valable qu'à faible vitesse, pour un écoulement subsonique, la véritable formule (formule de St Venant) est obtenue en supposant que l'écoulement est isentropique et adiabatique :

$$\Delta p = p_t - p_s = p_s \left(1 + \frac{(\gamma - 1)}{2} M_\infty^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} - p_s \quad (1.6)$$

Dans le cas supersonique, il faut appliquer la formule de Rayleigh :

$$\Delta p = p_t \left(\frac{(\gamma + 1) M_\infty^2}{2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \left(\frac{\gamma + 1}{2\gamma M_\infty^2 - (\gamma - 1)} \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} \quad (1.7)$$

Dans le cas où le Mach de vol est faible il est possible de linéariser (1.6) :

$$\Delta p = p_t - p_s = p_s \frac{\gamma}{2} M_\infty^2 \quad (1.8)$$

En utilisant :

$$c = \sqrt{\gamma r T} \quad \text{et} \quad p = \rho r T$$

il est possible de réécrire (1.8) en utilisant les relations précédentes :

$$\Delta p = p_s \frac{\gamma}{2} M_\infty^2 = \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 \quad (1.9)$$

A faible vitesse la formule de St Venant se simplifie donc pour donner celle de Bernoulli.

Pour pouvoir utiliser la mesure donnée par le tube de Pitot, il est nécessaire de l'étalonner. Cet étalonnage est effectué au sol, pour $\rho = \rho_0$. Pour chaque valeur de ΔP mesurée, une valeur de la vitesse est déterminée. Pour éviter au pilote de faire des conversions entre la pression mesurée et la vitesse, le manomètre est directement gradué en vitesse.

La vitesse conventionnelle V_c

Pour réaliser l'étalonnage de l'anémomètre, il est possible d'utiliser les formules (1.8 ou 1.6) à basse vitesse et uniquement (1.6) pour les vitesses élevées. Cependant quelle que soit la formule utilisée, celle ci fait intervenir la masse volumique. Lors de l'étalonnage, la masse volumique est supposée constante et égale à ρ_0 . La vitesse donnée par le manomètre sera donc entachée d'une erreur liée à la non prise en compte de la variation de densité de l'air ambiant. La vitesse mesurée n'est égale à la vitesse vraie qu'au sol où $\rho = \rho_0$. Ce problème est mis en évidence par les figures 1.7 et 1.8 où est représentée l'évolution du différentiel de pression calculé à partir de la formule de Rayleigh ou la formule de Bernoulli en fonction de la vitesse vol pour deux altitudes (le niveau de la mer et 10 000 m). Ce résultat montre que pour un même ΔP , la vitesse correspondante est très différente suivant l'altitude de vol.

La vitesse affichée sur l'anémomètre est appelée : vitesse conventionnelle, V_c . Pour relier V_c à la vitesse vraie V , il existe un abaque dit : *abaque de Chevalier* (Fig. 1.9). Les écarts entre ces deux vitesses peuvent être non négligeables comme le montre le tableau 1.2.

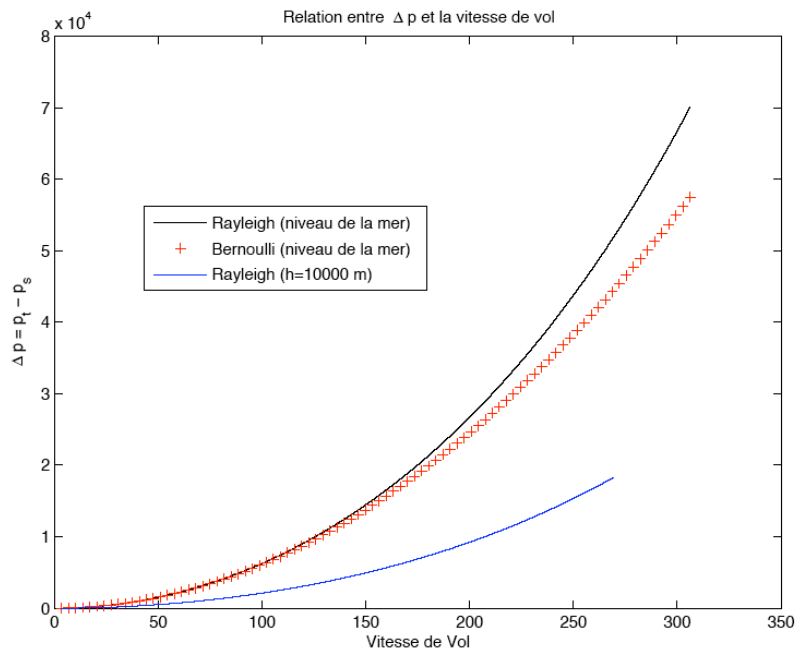


FIGURE 1.7 – Représentation du ΔP calculé, au niveau de la mer avec la formule de Rayleigh ainsi qu’avec la formule de Bernoulli et à une altitude 10 000 m avec la formule de Rayleigh en fonction de la vitesse de vol.

H(m)	11000	11000	11000
V(kt)	181.2	512.2	965.9
Mach	0.316	0.893	1.684
$V_c(kt)$	100	300	600
EV(kt)	98.8	279.2	526.5

TABLE 1.2 – Comparaison entre les différentes vitesses

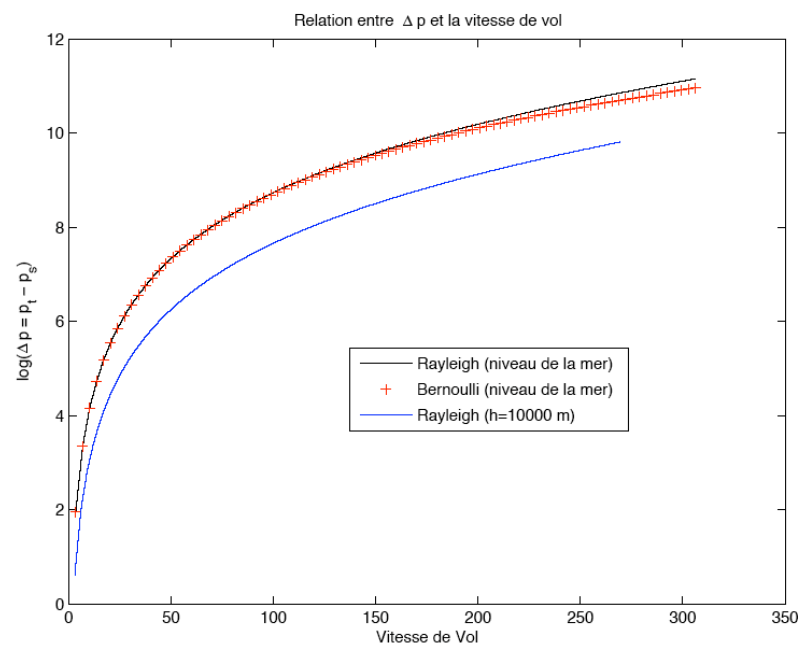


FIGURE 1.8 – Représentation du logarithme de ΔP calculé, au niveau de la mer avec la formule de Rayleigh ainsi qu'avec la formule de Bernoulli et à une altitude 10 000 m avec la formule de Rayleigh en fonction de la vitesse de vol.

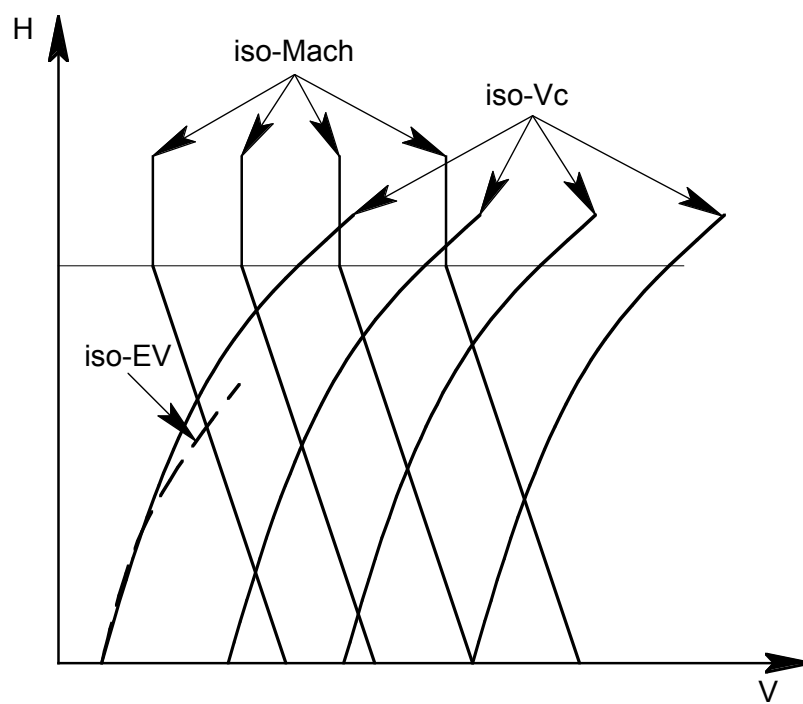


FIGURE 1.9 – Abaque dit de Chevalier

Pourquoi utiliser V_c ?

Pour bien comprendre l'intérêt de la vitesse conventionnelle, il ne faut pas voir l'anémomètre comme un instrument de navigation mais comme un instrument de pilotage. Dans cette optique, il est plus important de savoir si l'avion risque de décrocher plutôt que de savoir à quelle vitesse vraie va l'avion.

Nous allons introduire, ici, en quelques lignes la notion de décrochage : l'avion décroche quand la portance aérodynamique n'est plus suffisante pour équilibrer le poids de l'avion. La portance est donnée par l'équation suivante :

$$L = \frac{1}{2} \rho S V^2 C_L \quad (1.10)$$

La valeur maximale de C_L , $C_{L_{max}}$ et l'équation (1.10) permettent de connaître la vitesse minimale que doit avoir l'avion pour se maintenir dans les airs. Cette vitesse est définie comme la vitesse décrochage, V_{decro} .

$$mg = L = \frac{1}{2} \rho S V_{decro}^2 C_{L_{max}} \quad (1.11)$$

Les risques de décrochage ont généralement lieu à basse vitesse (décollage, approche, atterrissage). Dans ce cas de figure, il est possible d'utiliser la formule (1.9), ce qui donne :

$$\Delta p = \frac{1}{2} \rho V^2 = \frac{1}{2} \rho_0 V_c^2 \quad (1.12)$$

Il est donc possible de réécrire (1.10) :

$$mg = L = \frac{1}{2} \rho_0 S V_c^2 C_L \quad (1.13)$$

ce qui donne une vitesse limite inférieure de vol, $V_{c_{lim}}$, à ne jamais franchir sous peine de voir l'avion décrocher.

$$V_{c_{lim}} = \sqrt{\frac{2mg}{\rho_0 S C_L}} \quad (1.14)$$

L'anémomètre sert alors d'indicateur de décrochage. Ceci est particulièrement intéressant car la vitesse conventionnelle de décrochage est indépendante des variations de densité. La vitesse conventionnelle sera donc utilisée pour définir des domaines de vol.

L'équivalent vitesse

Certaines personnes utilisent une autre vitesse appelée l'équivalent vitesse EV. Il est défini comme suit :

$$EV = \sqrt{\sigma} V$$

Il sert aussi d'indicateur de décrochage et est équivalent à V_c à basse vitesse, où la relation de Bernoulli peut s'appliquer. A grande vitesse V_c et EV diffèrent énormément (voir tableau 1.2). A basse vitesse nous avons :

$$C_{L_{max}} = mg / \frac{1}{2} \rho_0 S (EV)^2 \quad (1.15)$$

Chapitre 2

Performances

2.1 Introduction

Lors de l'étude d'un véhicule, il est important de pouvoir répondre à de nombreuses questions sur ses performances. Dans le cas d'un avion, parmi les questions les plus couramment posées, nous pouvons trouver, en autres, les questions suivantes : Quelle est sa vitesse maximale ? Quelle altitude maximale peut-il atteindre ? A quelle vitesse et suivant quelle pente peut-il monter ? Quel est son rayon d'action ? Le but de ce chapitre est d'essayer de répondre à ces questions.

Les performances d'un avion dépendent de son poids, de ses caractéristiques aérodynamiques et de la poussée ou de la puissance fournie par ses moteurs.

Dans le cadre de cours, nous supposons que les forces de traînée et de portance peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$D = \frac{1}{2} \rho S V^2 C_D \quad (2.1)$$

$$L = \frac{1}{2} \rho S V^2 C_L \quad (2.2)$$

avec ρ la densité de l'air, S une surface de référence, V la vitesse de l'avion et C_D et C_L les coefficients de traînée et de portance. Ces deux coefficients sont obtenus de la façon suivante :

$$C_L = a(\alpha - \alpha_0) \quad (2.3)$$

$$C_D = C_{D_0} + k C_L^2 \quad (2.4)$$

avec a une constante caractéristique de l'avion, α l'incidence, α_0 l'incidence associée à une portance nulle, C_{D_0} le coefficient de traînée associé à une portance nulle et $k C_L^2$ le terme caractérisant la traînée induite. La constante k peut s'écrire sous la forme suivante :

$$k = \frac{1}{\pi e \lambda} \quad (2.5)$$

avec $\lambda = B^2/S$ l'allongement avec B l'envergure de l'avion et e une constante caractérisant le profil, $e = 1$ pour un profil elliptique et $e < 1$ pour les autres profils. Ce coefficient e est déterminé à partir de mesures en soufflerie.

2.2 Equation du vol dans le plan vertical

2.2.1 Hypothèses

Pour pouvoir mettre en évidence les phénomènes importants, nous allons faire les hypothèses simplificatrices suivantes :

- Le centre de poussée et le centre de gravité sont supposés confondus
- Le vol est supposé symétrique

2.2.2 Bilan des forces exercées sur l'avion

Comme dans tout problème de mécanique, il est important de faire un bilan exhaustif des forces exercées sur l'avion.

- Le poids : $\mathbf{P}$
- La poussée due aux moteurs : $\mathbf{T}$
- Les forces aérodynamique $\mathbf{R}_a$ qui peuvent se décomposer en :
 - $\mathbf{L}$ la force de portance
 - $\mathbf{D}$ la force de traînée

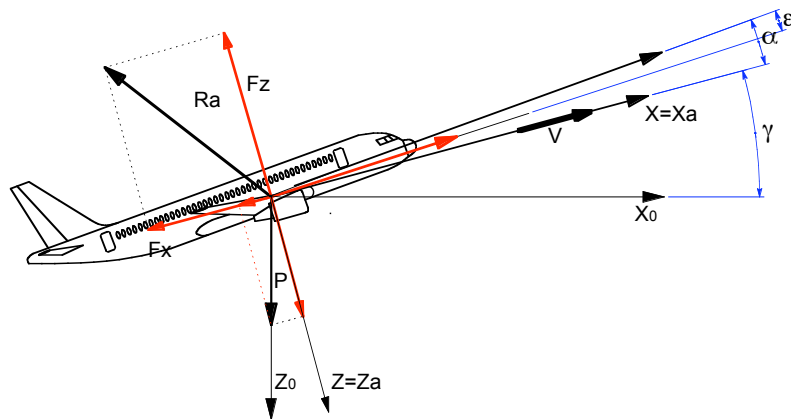


FIGURE 2.1 – Projection des différentes forces exercées sur l'avion.

La figure 2.1 reprend l'ensemble de ces forces. Il est important de se rappeler que la portance $\mathbf{L}$ est perpendiculaire à la vitesse et la traînée $\mathbf{D}$ sur le même axe que la vitesse. La poussée $\mathbf{T}$ s'exerce suivant l'axe de l'avion.

2.2.3 Les équations du mouvement

Les mouvements de l'avion dans le plan vertical sont régis par les deux équations suivantes :

$$T \cos(\alpha - \epsilon) - D - P \sin \gamma = \frac{P}{g} \frac{dV}{dt} \quad (2.6)$$

$$T \sin(\alpha - \epsilon) + L - P \cos \gamma = \frac{P}{g} \frac{V^2}{R} \quad (2.7)$$

avec ϵ l'angle de calage des moteurs, α l'angle d'incidence de l'avion, P le poids de l'avion, γ l'angle formé par le vecteur vitesse et l'horizontale appelée *la pente aérodynamique*, R le rayon local de giration et V la vitesse tangente à la trajectoire. L'ensemble de ces notations sont reportées sur la figure 2.3.

Dans le cadre de l'étude classique des performances d'un avion, nous supposons que la poussée des moteurs est alignée avec l'axe de l'avion, soit : $\epsilon = 0$. De même nous supposons que l'angle d'incidence de l'avion est faible. Nous nous plaçons dans le cas d'un vol stationnaire. Les équations 2.6 et 2.7 s'écrivent dans ces conditions :

$$T - D - P \sin \gamma = 0 \quad (2.8)$$

$$L - P \cos \gamma = 0 \quad (2.9)$$

A ces deux équations, nous pouvons ajouter les deux équations suivantes qui permettent de déterminer la position de l'avion dans l'espace :

$$\dot{x} = V \cos \gamma \quad (2.10)$$

$$\dot{h} = V \sin \gamma \quad (2.11)$$

Il est possible d'exprimer les équations précédentes de façon plus compactes en utilisant les grandeurs adimensionnées suivantes :

$$f = \frac{C_L}{C_D} \quad (2.12)$$

$$n = \frac{L}{P} \quad (2.13)$$

$$t = \frac{T \cdot f_{max}}{P} \quad (2.14)$$

$$u = \frac{V}{V_R} \quad (2.15)$$

$$V_R = \sqrt{\frac{2 \cdot P}{\rho \cdot S}} \sqrt[4]{\frac{k}{C_{D_0}}} \quad (2.16)$$

où f est la *finesse aérodynamique*, f_{max} la finesse maximale, n le *facteur de charge*, t la poussée adimensionnée, u est la vitesse adimensionnée par V_R , la vitesse de référence, V_R correspondant à la vitesse associée à la traînée minimale.

Pour déterminer la finesse maximale f_{max} , il suffit de trouver le point pour lequel la dérivée de $1/f$ est nulle.

$$\frac{1}{f} = \frac{C_D}{C_L} = \frac{C_{D_0} + kC_L^2}{C_L} \quad (2.17)$$

pour déterminer la valeur maximale de la finesse,

$$\frac{d}{dC_L} \left(\frac{C_D}{C_L} \right) = \frac{-C_{D_0} + kC_L^2}{C_L^2} = 0 \quad (2.18)$$

ce qui donne :

$$C_L^* = \sqrt{\frac{C_{D_0}}{k}} \quad (2.19)$$

ou encore

$$\left(\frac{C_D}{C_L} \right)_{min} = 2\sqrt{kC_{D_0}} \quad (2.20)$$

ce qui donne pour la finesse maximale :

$$f_{max} = \left(\frac{C_L}{C_D} \right)_{max} = \frac{1}{2\sqrt{kC_{D_0}}} \quad (2.21)$$

Il est possible d'exprimer la traînée en fonction des grandeurs adimensionnées :

$$D = \frac{1}{2}\rho V^2 S (C_{D_0} + kC_L^2). \quad (2.22)$$

Il est possible d'exprimer le coefficient de portance en fonction du poids de l'avion et du facteur de charge :

$$C_L = \frac{2nP}{\rho V^2 S}. \quad (2.23)$$

2.22 s'écrit alors :

$$D = \frac{1}{2}\rho V^2 S \left(C_{D_0} + \left(\frac{4kn^2 P^2}{\rho^2 V^4 S^2} \right) \right) \quad (2.24)$$

ou encore

$$D = \frac{1}{2}\rho S \left(C_{D_0} V^2 + \left(\frac{4kn^2 P^2}{\rho^2 V^2 S^2} \right) \right) \quad (2.25)$$

ce qui donne en fonction des grandeurs adimensionnées :

$$D = \frac{P}{2f_{max}} \left(u^2 + \frac{n^2}{u^2} \right) \quad (2.26)$$

Les équations 2.6 et 2.7 peuvent s'écrire :

$$\frac{tP}{f_{max}} - \frac{P}{2f_{max}} \left(u^2 + \frac{n^2}{u^2} \right) - P \sin \gamma = 0 \quad (2.27)$$

ou encore

$$2tu^2 - u^4 - n^2 - 2f_{max}u^2 \sin \gamma = 0 \quad (2.28)$$

et

$$n - \cos \gamma = 0 \quad (2.29)$$

2.3 Le vol plané

Tout les avions quelles que soient leurs motorisations, sont avant tout des planeurs. Il est donc important de commencer l'étude des performances d'un avion par l'étude de ses performances dans le cas du vol plané.

2.3.1 Hypothèses

- L'angle de calage de la voilure est supposé nul. L'incidence de l'avion est égale à l'angle d'attaque de l'aile.
- La poussée des moteurs est nulle.
- Nous nous limitons au cas du vol plané stationnaire uniforme.
- Le vol est supposé symétrique

2.3.2 Bilan des forces exercées sur l'avion

- Le poids : $\mathbf{P}$
- Les forces aérodynamique $\mathbf{R}_a$ qui peuvent se décomposer en :
 - La portance $\mathbf{L}$
 - La traînée $\mathbf{D}$

La pente aérodynamique est négative : $\gamma < 0$. La projection dans le plan vertical des différentes forces qui s'exercent sur l'avion est donnée sur la figure 2.2.

2.3.3 Les équations du vol plané

Les équations 2.6, 2.7, 2.10 et 2.11 s'écrivent alors :

$$D + P \sin \gamma = 0 \quad (2.30)$$

$$L - P \cos \gamma = 0 \quad (2.31)$$

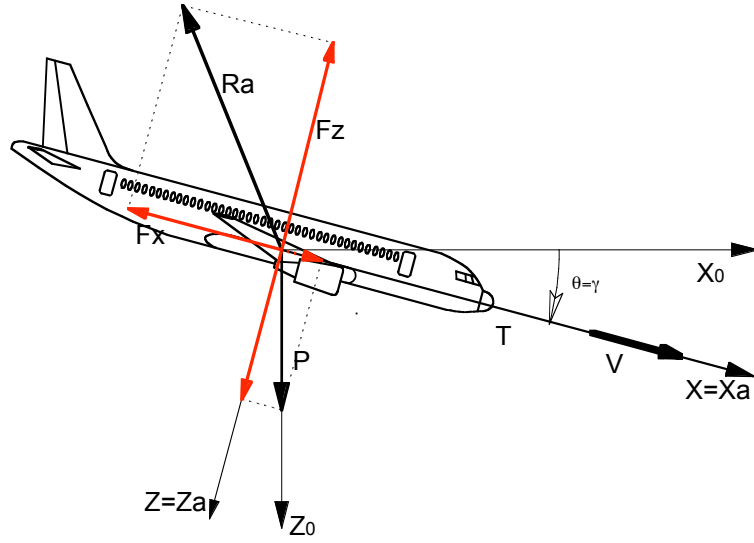


FIGURE 2.2 – Projection des différentes forces exercées sur l'avion.

$$\dot{x} = V \cos \gamma \quad (2.32)$$

$$\dot{h} = V \sin \gamma \quad (2.33)$$

Dans la plupart des cas de vol plané, la pente aérodynamique est faible. Il est donc possible de réécrire les équations précédentes comme suit :

$$D + P\gamma = 0 \quad (2.34)$$

$$L = P \quad (2.35)$$

$$\dot{x} = V \quad (2.36)$$

$$\dot{h} = V\gamma \quad (2.37)$$

Les forces de portance et de traînée sont données par :

$$L = \frac{1}{2} \rho S V^2 C_L \quad (2.38)$$

et

$$D = \frac{1}{2}\rho S V^2 C_D = \frac{1}{2}\rho S V^2 (C_{D_0} + k C_L^2) \quad (2.39)$$

Les équations 2.35 et 2.38 permettent d'exprimer la vitesse de l'avion en fonction de son poids et du coefficient de portance :

$$V = \sqrt{\frac{2P}{\rho S C_L}} \quad (2.40)$$

2.3.4 La pente aérodynamique

L'angle de descente (la pente aérodynamique) est obtenue à partir des équations 2.34 et 2.35 :

$$\begin{aligned} \gamma &= -\frac{D}{P} \\ &= -\frac{D}{L} \\ &= -\frac{1}{f} \end{aligned} \quad (2.41)$$

L'angle de descente minimal, γ_{min} est donc obtenu pour la finesse maximale. Le poids du planeur étant constant tout au long de sa descente, l'expression précédente permet aussi de montrer que la finesse maximale est obtenue lorsque la traînée est minimale.

$$\gamma_{min} = -\frac{1}{f_{max}} = -\frac{D_{min}}{P} \quad (2.42)$$

L'équation 2.19 nous donne le coefficient de portance associé à la finesse maximale, il est donc possible de déterminer la vitesse de vol associée à l'angle de descente minimal :

$$V = \sqrt{\frac{2P}{\rho S C_L^*}} \quad (2.43)$$

ou encore

$$V_{\gamma_{min}} = \sqrt{\frac{2P}{\rho S}} \sqrt[4]{\frac{k}{C_{D_0}}} = V_R \quad (2.44)$$

La vitesse de référence définie dans la section précédente (2.16) correspond donc à la vitesse de l'avion lors d'un vol plané avec une pente de descente minimale.

2.3.5 Distance franchissable

Pour déterminer la distance franchissable, R par un planeur partant d'une altitude h_i , il faut procéder de la façon suivante :

$$\frac{dx}{dt} = V \quad (2.45)$$

$$\frac{dx}{dh} \frac{dh}{dt} = V \quad (2.46)$$

$$\frac{dx}{dh} = \frac{V}{V\gamma} \quad (2.47)$$

$$\frac{dx}{dh} = \frac{1}{\gamma} = -f \quad (2.48)$$

La distance franchissable, R , est obtenue en intégrant l'équation précédente entre l'altitude initiale, h_i , et le sol, h_f :

$$R = - \int_{h_i}^{h_f} f dh \quad (2.49)$$

Dans le cas où l'angle d'incidence de l'avion reste constant durant tout le vol, la finesse est, elle aussi, constante. Il est alors possible de réécrire l'équation précédente comme suit :

$$R = f \Delta h \quad (2.50)$$

avec $\Delta h = h_i - h_f$. Pour un même Δh la distance franchissable est proportionnelle à la finesse f et sera maximum pour un vol effectué à finesse maximale.

$$R_{max} = f_{max} \Delta h = \frac{\Delta h}{2\sqrt{kC_{D0}}} \quad (2.51)$$

2.3.6 Vitesse de chute (ou taux de chute)

La vitesse de chute de l'avion est notée v'_z , elle correspond à la composante dans le plan vertical de la vitesse de l'avion. Elle est obtenue comme suit :

$$\begin{aligned} v'_z &= -V\gamma \\ &= \frac{DV}{P} \\ &= \sqrt{\frac{2P}{\rho S C_L}} \left(\frac{C_D}{C_L} \right) \\ &= \sqrt{\frac{2P}{\rho S}} \left(\frac{C_D}{C_L^{3/2}} \right) \end{aligned} \quad (2.52)$$

Nous pouvons constater que la vitesse de chute est minimale quand DV (la puissance nécessaire pour le vol plané) est minimale. Cette configuration correspond au cas où $C_x/C_z^{3/2}$ est minimal soit :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dC_L} \left(\frac{C_D}{C_L^{3/2}} \right) &= 0 \\ \frac{d}{dC_L} \left(\frac{C_{D0} + kC_L^2}{C_L^{3/2}} \right) &= 0 \\ -\frac{3}{2} \frac{C_{D0}}{C_L^{5/2}} + \frac{k}{2} C_L^{-1/2} &= 0 \\ 3C_{D0} &= kC_L^2\end{aligned}\tag{2.53}$$

soit

$$C_{L_{v'_{zmin}}} = \sqrt{\frac{3C_{D0}}{k}} = \sqrt{3}C_L^* \tag{2.54}$$

La vitesse de l'avion dans le cas d'un vol plané à vitesse de descente minimale est :

$$V_{v'_{zmin}} = \sqrt{\frac{2P}{\rho S}} \sqrt[4]{\frac{k}{3C_{D0}}} \simeq 0.76V_R \tag{2.55}$$

La vitesse de chute minimum est, elle, donnée par :

$$v'_{zmin} = 4 \sqrt{\frac{2P}{\rho S}} \sqrt[4]{\frac{k^3 C_{D0}}{27}} \tag{2.56}$$

2.3.7 L'endurance

L'endurance correspond au temps que le planeur reste en l'air. Il peut être déterminé comme suit :

$$dt = \frac{dh}{V\gamma}, \tag{2.57}$$

ce qui donne après intégration :

$$t = \sqrt{\frac{\rho S}{2P}} \left(\frac{C_L^{3/2}}{C_D} \right) (h_i - h_f) \tag{2.58}$$

Le temps passé en vol est maximum quand $(C_L^{3/2}/C_D)$ est maximum. Comme nous venons de le voir dans la section précédente, cette condition nous donne :

$$C_L = \sqrt{\frac{3C_{D0}}{k}} = \sqrt{3}C_L^* \tag{2.59}$$

et

$$V \simeq 0.76V_R \quad (2.60)$$

ce qui donne :

$$t_{max} = \sqrt{\frac{\rho S}{2P}} \sqrt[4]{\frac{27}{k^3 C_{D_0}}} \left(\frac{h_i - h_f}{4} \right) \quad (2.61)$$

Exemple 2.1

Soit un planeur ayant les caractéristiques suivantes : $P = 2000 \text{ N}$, $S = 8 \text{ m}^2$, $\lambda = 16.0$, $e = 0.95$, $C_{D_0} = 0.015$. Il est lâché par l'avion qui le tracte à une altitude de 300 m. Calculer le rayon d'action maximum ainsi l'angle de descente correspondant, ainsi que la vitesse et le coefficient de portante C_L . La densité de l'air sera prise égale à $\rho = 1.225 \text{ kg/m}^3$

$$\begin{aligned} k &= \frac{1}{\pi \lambda e} \\ &= \frac{1}{\pi * 16 * 0.95} = 0.02 \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} f_{max} &= \frac{1}{2\sqrt{kC_{D_0}}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{0.02 * 0.015}} = 28.86 \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} R_{max} &= f_{max} \Delta h \\ &= 28.86 * 300 = 8.658 \text{ km} \end{aligned}$$

ou encore pour l'angle de descente minimum

$$\begin{aligned} \gamma_{min} &= \frac{1}{f_{max}} \\ &= \frac{1}{28.86} = 0.0346 \text{ rad} = 1.985 \text{ deg} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{\gamma_{min}} &= \sqrt{\frac{2P}{\rho S}} \sqrt[4]{\frac{k}{C_{D_0}}} \\ &= \sqrt{\frac{2 * 2000}{1.225 * 8}} \sqrt[4]{\frac{0.02}{0.015}} = 23.328 \text{ m.s}^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_L &= \sqrt{\frac{C_{D_0}}{k}} \\ &= \sqrt{\frac{0.015}{0.02}} = 0.866 \end{aligned}$$

Exemple 2.2

Un planeur ayant un poids de 5000 N est équipé d'une aile elliptique d'une surface 10 m². Pour assurer une descente stabilisée suivant un angle de 3 deg, la vitesse du planeur doit être de 50 m.s⁻¹. Nous supposons que pour ce planeur $C_{D_0} = 0.015$, quel est alors son aspect ratio A. Le planeur étant équipé d'un profil d'aile elliptique, nous savons que : $e = 1$.

$$\begin{aligned}\gamma &= -\frac{C_D}{C_L} \\ &= \frac{3 * 2\pi}{360} = -0.0524 \text{ rad}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C_L &= \frac{2P}{\rho S V^2} \\ &= \frac{2 * 5\,000}{1.225 * 10 * 50^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C_D &= C_L \cdot \gamma \\ &= 0.326 * 0.0524 = 0.01708\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}k &= \frac{C_D - C_{D_0}}{C_L^2} \\ &= \frac{0.01708 - 0.015}{0.326^2} = 0.0196\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{1}{k\pi e} \\ &= \frac{1}{0.0196 * \pi * 1} = 16.20\end{aligned}$$

2.4 Le vol horizontal**2.4.1 Hypothèses**

- L'angle de calage de la voilure est supposé nul. L'incidence de l'avion est égale à l'angle d'attaque de l'aile.
- Le centre de poussée et le centre de gravité sont supposés confondus
- Nous nous limitons au cas du vol stationnaire uniforme à altitude constante.
- Le vol est supposé symétrique

2.4.2 Bilan des forces exercées sur l'avion

- Le poids : **P**
- La poussée due aux moteurs : **T**
- Les forces aérodynamique **R_a** qui peuvent se décomposer en :
 - La portance **L**
 - La traînée **D**

La figure 2.3 reprend l'ensemble de ces forces. Il est important de se rappeler que la portance **L** est perpendiculaire à la vitesse et la traînée **D** sur le même axe que la vitesse. La poussée **T** s'exerce suivant l'axe de l'avion.

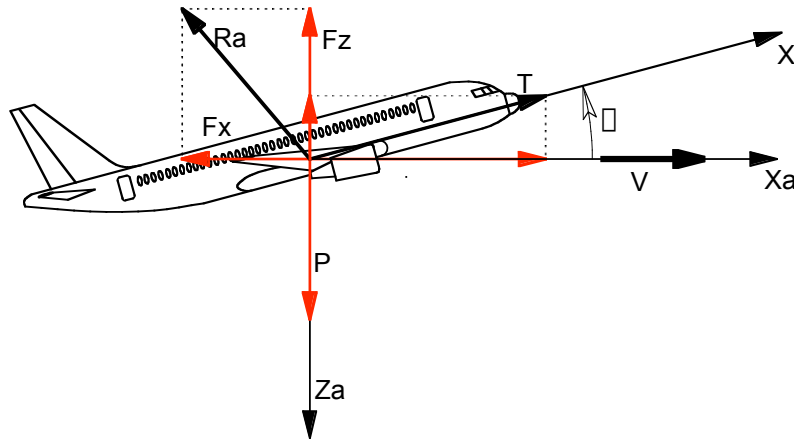


FIGURE 2.3 – Projection des différentes forces exercées sur l'avion.

2.4.3 Equation du vol à l'équilibre

Dans le cas du vol horizontal et uniforme et en effectuant les hypothèses énoncées précédemment les équations 2.6, 2.7, 2.10 et 2.11 deviennent :

$$P = L + T \sin \alpha \quad (2.62)$$

$$D = T \cos \alpha \quad (2.63)$$

$$\dot{x} = V \quad (2.64)$$

$$\dot{h} = 0 \quad (2.65)$$

Pour la plupart des avions, en vol de croisière l'angle d'incidence α est très faible. Les équations précédentes peuvent donc se simplifier pour donner un jeu d'équations extrêmement simples :

$$P = L \quad (2.66)$$

$$D = T \quad (2.67)$$

$$\dot{x} = V \quad (2.68)$$

$$\dot{h} = 0 \quad (2.69)$$

ou encore

$$P = \frac{1}{2} \rho S V^2 C_L \quad (2.70)$$

$$T = \frac{1}{2} \rho S V^2 C_D \quad (2.71)$$

Il est alors possible de relier la poussée, la traînée et la finesse de l'avion par la relation suivante :

$$\frac{P}{T} = \frac{C_L}{C_D} = f \quad (2.72)$$

2.4.4 Les courbes "planeur"

La caractérisation d'un avion se fait en étudiant dans un premier temps l'aérodynamique de l'avion celui-ci étant alors considéré comme un planeur, puis dans un deuxième temps en étudiant la motorisation.

L'étude du planeur permet de déterminer les besoins de l'avion pour voler en palier suivant la vitesse de vol souhaitée. Une fois ces besoins déterminés, il est possible de choisir une motorisation adaptée.

Les moteurs disponibles sur le marché sont caractérisés soit par leur poussée (les turboréacteurs) ou leur puissance (les moteurs à hélice). Il existe donc deux types de courbes "planeur" :

- Les courbes donnant la traînée en fonction de la vitesse,
- Les courbes donnant la puissance nécessaire en fonction de la vitesse.

Détermination des courbes "planeur" à partir de l'étude de la polaire

On définit une courbe "planeur" pour une altitude donnée, un poids d'avion donné et une polaire donnée (Fig. 2.4). Il est possible à partir de l'étude de la polaire de déterminer l'évolution

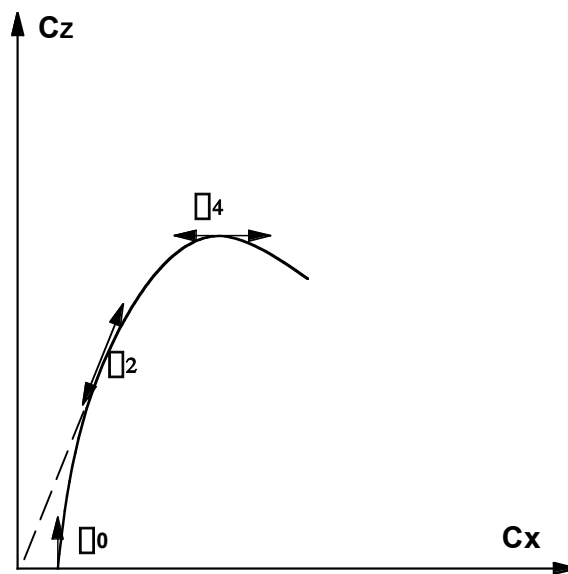


FIGURE 2.4 – Polaire de l'avion

de la traînée en fonction de la vitesse. Le raisonnement appliqué est synthétisé dans le tableau 2.1. La courbe "planeur" (traînée/vitesse) ainsi obtenue est présentée sur la figure 2.5. En utilisant la relation suivante, il est possible de déterminer la courbe "planeur" puissance/vitesse (Fig. 2.5).

$$W = T * V$$

V	V_{min}	$\nearrow$	$V_{f_{max}}$	$\nearrow$	∞
α	α_4	$\searrow$	α_2	$\searrow$	α_0
f	f_4	$\nearrow$	f_{max}	$\searrow$	0
$T = \frac{P}{f}$	T_4	$\searrow$	T_{min}	$\nearrow$	∞

TABLE 2.1 – Détermination de l'évolution de la traînée du planeur en fonction de sa vitesse

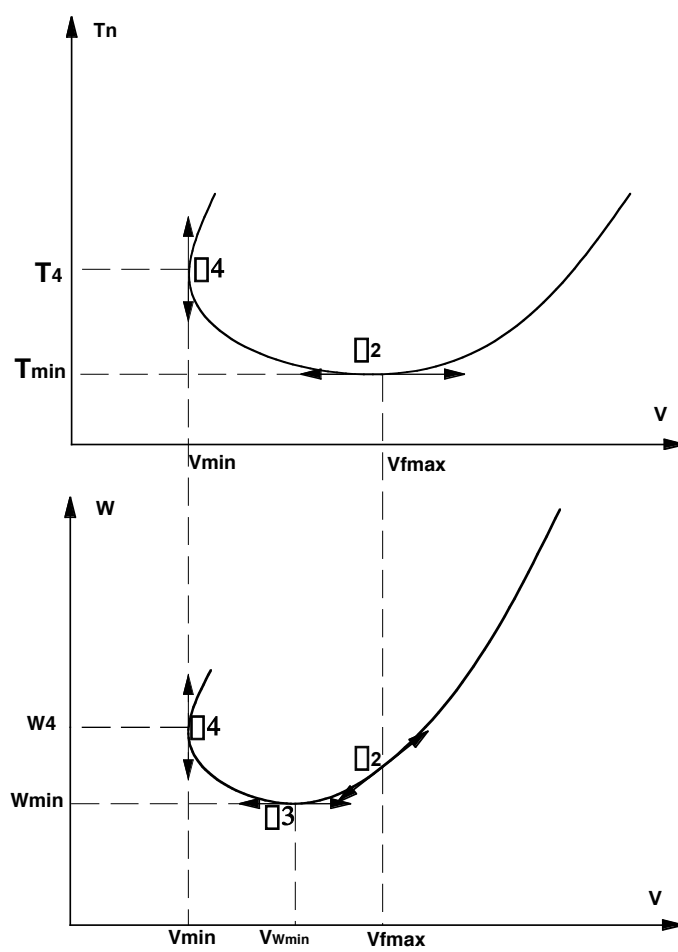


FIGURE 2.5 – Courbes "planeur"

Détermination des courbes "planeur" à partir des équations du mouvement

La courbe planeur représente la poussée nécessaire, T_n , à fournir en fonction de la vitesse. La poussée étant égale à la traînée dans le cas du vol en palier, nous étudierons l'évolution de la traînée en fonction de la vitesse pour déterminer les équations de la courbe "planeur". L'expression de la traînée est donnée par la formule suivante :

$$T_n = D = \frac{1}{2}\rho SV^2(C_{D_0} + kC_L^2) \quad (2.73)$$

Le facteur de charge étant nul, le coefficient de portance s'exprime en fonction du poids et de la vitesse comme suit :

$$C_L = \frac{2P}{\rho SV^2}. \quad (2.74)$$

La poussée nécessaire peut alors s'écrire :

$$T_n = \frac{1}{2}\rho SV^2 \left(C_{D_0} + \frac{4kP^2}{\rho^2 S^2 V^4} \right) \quad (2.75)$$

ou encore

$$T_n = \underbrace{\frac{1}{2}\rho SV^2 C_{D_0}}_{\text{traînée de frottement}} + \underbrace{\frac{2kP^2}{\rho SV^2}}_{\text{traînée induite}} \quad (2.76)$$

L'expression de la poussée nécessaire en fonction de la vitesse est caractéristique des avions. Elle est composée de deux termes, la traînée de frottement et la traînée induite, qui évoluent de façon inverse suivant la vitesse. La traînée de frottement augmente avec la vitesse alors que la traînée induite diminue avec la vitesse. L'évolution de la traînée induite s'explique par le fait qu'à basse vitesse l'avion doit avoir un C_L élevé pour assurer sa portance alors qu'à haute vitesse la portance étant assurée en grande partie par le terme V^2 le C_L est réduit.

L'évolution de la poussée nécessaire en fonction de la vitesse étant la résultante de ces deux grandeurs, elle connaît un minimum. La vitesse correspondant à la poussée nécessaire minimale peut être obtenue en dérivant 2.76 :

$$\rho SV C_{D_0} - \frac{4kP^2}{\rho SV^3} = 0 \quad (2.77)$$

ce qui donne

$$V_{T_{n_{min}}} = \sqrt{\frac{2P}{\rho S}} \sqrt[4]{\frac{k}{C_{D_0}}} \quad (2.78)$$

En substituant 2.78 dans 2.76, il est possible de déterminer la poussée nécessaire minimale pour faire voler l'avion :

$$T_{n_{min}} = 2P \sqrt{k C_{D_0}} \quad (2.79)$$

La puissance nécessaire au vol en palier, W_n , est donnée par l'expression suivante :

$$\begin{aligned} W_n &= D.V = T.V \\ &= \frac{1}{2}\rho V^3 SC_{D_0} + \left(\frac{2kP^2}{\rho VS} \right) \end{aligned} \quad (2.80)$$

Comme dans le cas de la vitesse, la puissance nécessaire est la résultante de deux composantes ayant un comportement inverse en fonction de la vitesse. Il existe donc une vitesse pour laquelle la puissance nécessaire à fournir pour faire voler l'avion en palier est minimale. Pour la déterminer, nous pouvons procéder comme suit :

$$\frac{dW_n}{dV} = \frac{3}{2}\rho V^2 SC_{D_0} - \left(\frac{2kP^2}{\rho V^2 S} \right) = 0, \quad (2.81)$$

ce qui donne pour une vitesse associée à la puissance minimale :

$$V_{W_{nmin}} = \sqrt{\frac{2P}{\rho S}} \sqrt[4]{\frac{k}{3C_{D_0}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} V_R \quad (2.82)$$

La vitesse $V_{W_{nmin}}$ étant connue, il est possible de déterminer le coefficient de portance correspondant :

$$C_{L_{W_{nmin}}} = \frac{2P}{\rho S V_{W_{nmin}}^2} \quad (2.83)$$

ou encore

$$C_{L_{W_{nmin}}} = \sqrt{\frac{3C_{D_0}}{k}} = \sqrt{3} C_L^* \quad (2.84)$$

de même, la finesse vol liée à la puissance nécessaire minimale pour le vol en palier en données par :

$$f_{W_{nmin}} = 0.866 f_{max} \quad (2.85)$$

ce qui finalement donne pour la puissance nécessaire minimale au vol en palier :

$$W_{nmin} = \frac{P V_{W_{nmin}}}{0.866 f_{max}} \quad (2.86)$$

2.4.5 Courbes "moteur"

Trois types de moteur sont disponibles pour équiper les avions :

- les groupes motopropulseurs (moteurs à pistons + hélices) ;
- les turboréacteurs ;
- les turbopropulseurs (une turbine fait tourner une hélices).

Les groupes motopropulseurs

Un groupe motopropulseur regroupe un moteur à pistons qui entraîne une hélice. Un moteur à pistons est caractérisé par la puissance qu'il est capable de fournir (W_m).

L'hélice, elle, est caractérisée par un coefficient d'efficacité (η_h) qui caractérise son aptitude à transformer la puissance mécanique en puissance propulsive réellement utile (W_u).

$$W_u = \eta_h * W_m$$

L'évolution de W_u en fonction de la vitesse est présentée sur la figure 2.6. Pour une vitesse inférieure à V_A , le rendement de l'hélice augmente avec la vitesse permettant ainsi l'augmentation de W_u . Dans la plage de vitesse comprise en V_A et V_B , W_u est maintenue constante en jouant sur le pas de l'hélice. Pour des vitesses supérieures à V_B , le rendement de l'hélice diminue entraînant avec lui W_u .

Si l'altitude augmente la densité de l'air diminue, ce qui provoque une diminution de la puissance mécanique (W_m) donc de W_u .

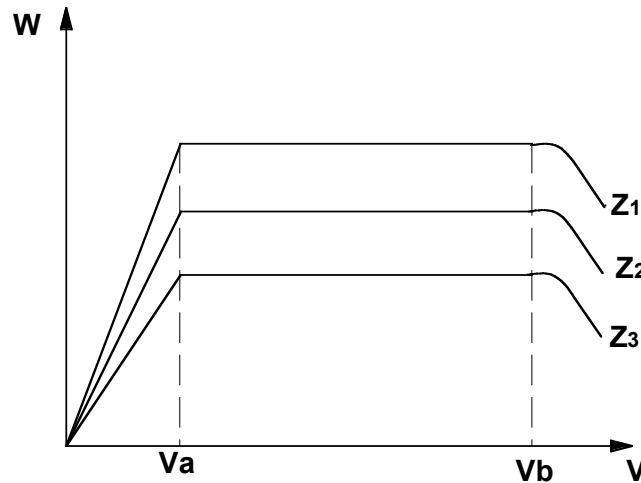


FIGURE 2.6 – Evolution de W_u en fonction V pour un groupe motopropulseur avec $Z_1 < Z_2 < Z_3$.

Le turboréacteur

La poussée fournie par un turboréacteur, T_u est proportionnelle à la quantité d'air déplacée ainsi qu'à sa variation de quantité de mouvement.

$$T_u = \dot{m}_{air}(V_{jet} - V_{avion})$$

Dans le cadre de ce cours, le terme $(V_{jet} - V_{avion})$ sera supposé constant dans toutes les phases de vol. Seul $\dot{m}_{air}$ diminue avec l'altitude. La poussée d'un turboréacteur, dans ces conditions, ne dépend que la densité de l'air et peut donc s'écrire de la façon suivante :

$$T_u(z) = \sigma T_u(sol)$$

La figure 2.7 représente la poussée T_u fournie par un turboréacteur en fonction de la vitesse et de l'altitude de l'avion. La puissance utile, W_u , est aussi présentée.

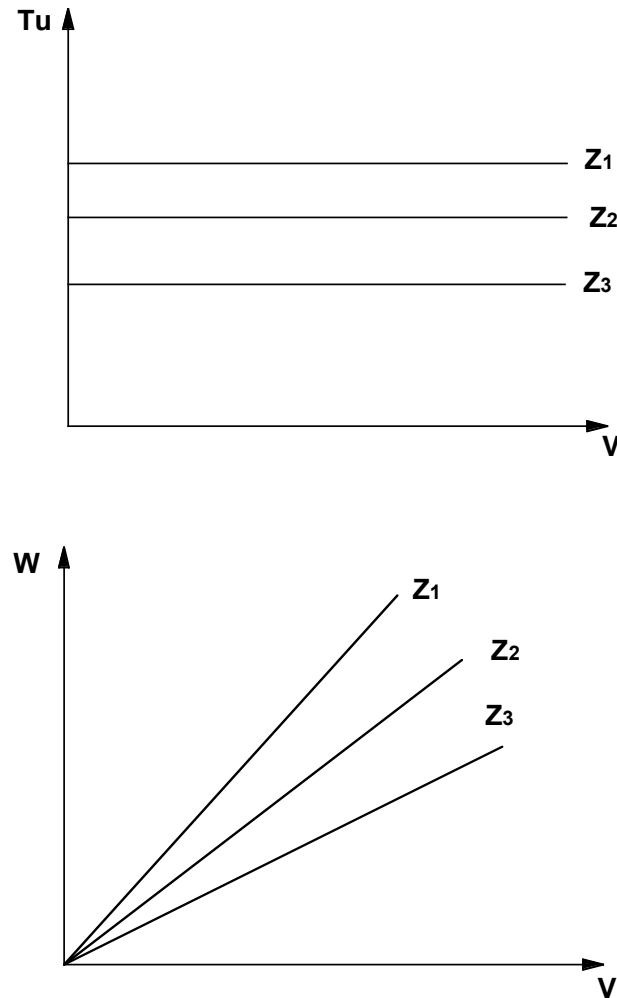


FIGURE 2.7 – Evolution de T_u et W_u en fonction V pour un turboréacteur avec $Z_1 < Z_2 < Z_3$.

2.4.6 Utilisation des courbes "planeur"/"moteur"

Une fois les courbes "planeur" et "moteur" déterminées, il suffit de les superposer pour vérifier si la motorisation choisie est adaptée à l'avion dessiné. La puissance ou la poussée fournie par le moteur doit en effet être suffisante pour compenser la puissance nécessitée par le planeur.

cas du groupe motopropulseur

Le diagramme regroupant les deux courbes "moteur" et "planeur" est présenté sur la figure 2.8. Sur cette courbe, deux points caractéristiques O2 et O1 apparaissent. Ils correspondent à deux configurations de vol où la puissance utile fournie par le groupe motopropulseur est exactement égale à la puissance nécessaire pour faire voler le planeur. Dans la zone comprise entre les points O1 et O2, il existe une réserve de puissance. Ce diagramme permet aussi de montrer que jamais l'avion présenté ici ne pourra voler à une vitesse inférieure à V_2 ou à une vitesse supérieure à V_1 .

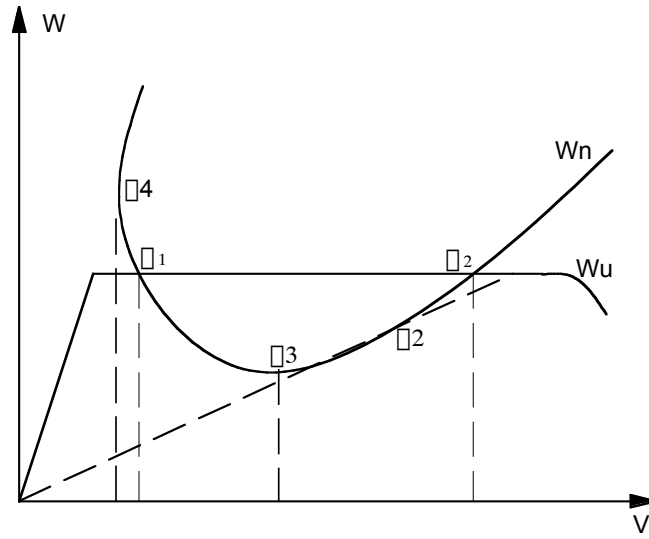


FIGURE 2.8 – Diagramme des puissances pour un groupe motopropulseur.

cas du groupe turboréacteur

Le raisonnement est le même que dans le cas précédent. Il suffit seulement de tracer le diagramme dans le repère vitesse-poussée et non vitesse-puissance (voir figure 2.9). Les résultats trouvés à partir de l'analyse du graphique 2.9 peuvent aussi être retrouver analytiquement. Pour cela nous posons :

$$T = D \quad (2.87)$$

$$= \frac{1}{2} \rho S V^2 (C_{D0} + k C_L^2) \quad (2.88)$$

$$= \frac{1}{2} \rho S V^2 C_{D0} + \left(\frac{2kP^2}{\rho S V^2} \right) \quad (2.89)$$

cette équation peut s'écrire sous la forme

$$AV^4 - TV^2 + B = 0 \quad (2.90)$$

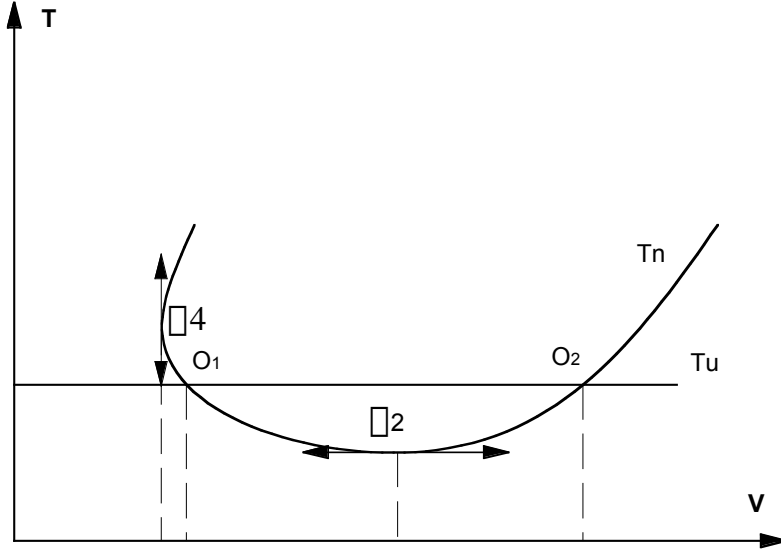


FIGURE 2.9 – Diagramme des poussées pour un turboréacteur.

avec

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \rho S C_{D_0} \\ B &= \left(\frac{2kP^2}{\rho S} \right) \end{aligned} \quad (2.91)$$

La solution de cette équation donne :

$$\begin{aligned} V_{max} &= \sqrt{\frac{T + \sqrt{T^2 - 4AB}}{2A}} \\ V_{min} &= \sqrt{\frac{T - \sqrt{T^2 - 4AB}}{2A}} \end{aligned} \quad (2.92)$$

L'avion peut donc voler à deux vitesses différentes V_{min} ou V_{max} . Cependant, il est important de vérifier que lorsque l'avion vol à V_{min} , il est capable de créer une force de portance suffisante pour compenser le poids de l'avion P . La force de portance est donnée par :

$$L = \frac{1}{2} \rho S V^2 C_L \quad (2.93)$$

Pour réduire la vitesse de l'avion, il est nécessaire d'augmenter au maximum le coefficient de portance C_L , ce qui nous donne une vitesse de vol minimale ou vitesse de décrochage :

$$V_{dec} = \sqrt{\frac{2P}{\rho S C_{L_{max}}}} \quad (2.94)$$

Si $V_{min} < V_{dec}$ alors, l'avion, ne peut voler à V_{min} . La plage de vitesse utile est alors : $V_{dec} < V < V_{max}$.

Les équations qui viennent d'être présentées sont exactes, mais elles sont peu pratiques pour conduire des calculs manuellement. Il est possible d'en obtenir une formulation plus légère en utilisant les équations adimensionnées du mouvement. 2.28 et 2.29 donne alors :

$$u^4 - 2tu^2 + 1 = 0 \quad (2.95)$$

$$n = 1 \quad (2.96)$$

ce qui donne comme solution pour les vitesses adimensionnées :

$$u_{max} = \sqrt{t + \sqrt{t^2 - 1}} \quad (2.97)$$

$$u_{min} = \sqrt{t - \sqrt{t^2 - 1}} \quad (2.98)$$

soit pour les vitesses dimensionnées :

$$V_{max} = u_{max} * V_R \quad (2.99)$$

$$V_{min} = u_{min} * V_R \quad (2.100)$$

Exemple 2.3

Soit un avion équipé de turboréacteur ayant un poids de 50 000 N et une surface de voilure $S = 32 \text{ m}^2$. Sa polaire est la suivante : $C_D = 0.014 + 0.038C_L^2$ avec $C_{L_{max}} = 1.5$. La poussée fournie par ses turboréacteurs est donnée par : $T = 20000\sigma \text{ N}$. Déterminer ses vitesses de vol minimale et maximale pour un vol au niveau de la mer ainsi que pour un vol à une altitude de 9 000 m ($\sigma = 0.3813$). Quelle est son altitude de vol maximale ?

Pour pouvoir utiliser les équations adimensionnées, nous devons déterminer la finesse maximale :

$$\begin{aligned} f_{max} &= \frac{1}{2\sqrt{kC_{D0}}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{0.038 * 0.014}} = 21,68 \end{aligned}$$

Dans le cas d'un vol au niveau de la mer, nous avons :

$$\begin{aligned} t &= \frac{Tf_{max}}{P} \\ &= \frac{20\,000 * 21.68}{50\,000} = 8.67 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_R &= \sqrt{\frac{2P}{\rho S}} \sqrt[4]{\frac{k}{C_{D0}}} \\ &= \sqrt{\frac{2 * 50\,000}{1.225 * 32}} \sqrt[4]{\frac{0.038}{0.014}} = 64.82 \text{ m.s}^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_{\max} &= \sqrt{t + \sqrt{t^2 - 1}} \\
 &= \sqrt{8.67 + \sqrt{8.67^2 - 1}} = 4.16 \\
 u_{\min} &= \sqrt{t - \sqrt{t^2 - 1}} \\
 &= \sqrt{8.67 - \sqrt{8.67^2 - 1}} = 0.24
 \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
 V_{\max} &= u_{\max} * V_R \\
 &= 64.82 * 4.16 = 269,52 \text{ m.s}^{-1} \\
 V_{\min} &= u_{\min} * V_R \\
 &= 64.82 * 0.24 = 15,59 \text{ m.s}^{-1}
 \end{aligned}$$

Il faut maintenant vérifier si $V_{\min} > V_{\text{dec}}$

$$\begin{aligned}
 V_{\text{dec}} &= \sqrt{\frac{2P}{\rho S C_{L_{\max}}}} \\
 &= \sqrt{\frac{2 * 20\,000}{1.225 * 32 * 1.5}} = 41.2 \text{ m.s}^{-1}
 \end{aligned}$$

comme $V_{\min} < V_{\text{dec}}$ les deux vitesses de vol autorisées pour cet avion, au niveau de la mer, seront :

$$\begin{aligned}
 V_{\max} &= 269.52 \text{ m.s}^{-1} \\
 V_{\min} &= 41.2 \text{ m.s}^{-1}
 \end{aligned}$$

Passons au cas où l'altitude de vol est 9 000 m. $\sigma = 0.3813$ ce qui nous donne une densité pour l'air égale à $\rho = 0.4671$ ainsi qu'une poussée fournie par les moteurs de $T = 7\,262$ N. Nous obtenons avec ces nouvelles données :

$$\begin{aligned}
 t &= \frac{T f_{\max}}{P} \\
 &= \frac{7\,262 * 21.68}{50\,000} = 3.31
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_R &= \sqrt{\frac{2P}{\rho S}} \sqrt[4]{\frac{k}{C_{x_0}}} \\
 &= \sqrt{\frac{2 * 50\,000}{0.3813 * 32}} \sqrt[4]{\frac{0.038}{0.014}} = 104.98 \text{ m.s}^{-1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_{\max} &= \sqrt{t + \sqrt{t^2 - 1}} \\
 &= \sqrt{3.31 + \sqrt{3.31^2 - 1}} = 2.54 \\
 u_{\min} &= \sqrt{t - \sqrt{t^2 - 1}} \\
 &= \sqrt{3.31 - \sqrt{3.31^2 - 1}} = 0.39
 \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} V_{\max} &= u_{\max} * V_R \\ &= 104.98 * 2.54 = 266.79 \text{ m.s}^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{\min} &= u_{\min} * V_R \\ &= 104.98 * 0.39 = 41.31 \text{ m.s}^{-1} \end{aligned}$$

Il faut maintenant vérifier si $V_{\min} > V_{\text{dec}}$

$$\begin{aligned} V_{\text{dec}} &= \sqrt{\frac{2P}{\rho S C_{L_{\max}}}} \\ &= \sqrt{\frac{2 * 7\,262}{0.4671 * 32 * 1.5}} = 66,78 \text{ m.s}^{-1} \end{aligned}$$

comme $V_{\min} < V_{\text{dec}}$ les deux vitesses de vol autorisées pour cet avion, à une altitude 9 000 m, seront :

$$V_{\max} = 266,79 \text{ m.s}^{-1}$$

$$V_{\min} = 66,78 \text{ m.s}^{-1}$$

Il reste à déterminer l'altitude maximale à laquelle l'avion puisse voler. Nous savons que la poussée fournie par les turboréacteurs diminue avec l'altitude. Il existe donc une altitude où l'avion ne possèdera plus de réserve de puissance. Il devra alors nécessairement voler à la finesse maximale. Dans ce cas, nous avons $z = 1$. A partir de son expression, nous pouvons déterminer la poussée correspondant à ce vol, à partir de cette poussée et de la loi d'évolution de la poussée en fonction de la densité, nous remontons à la densité locale. Cette densité nous permet alors, à partir des tables de l'atmosphère standard, de retrouver l'altitude est donc de connaître le plafond de propulsion.

$$\begin{aligned} T &= \frac{zP}{f_{\max}} \\ &= \frac{1 * 50\,000}{21.68} = 2306 \text{ N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{T}{T_0} \\ &= \frac{2306}{20\,000} = 0,3024 \end{aligned}$$

ce qui correspond à une altitude de 12 000 m (voir table de l'atmosphère standard en annexe).

2.5 Vol en montée

2.5.1 Hypothèses

- L'angle de calage de la voilure est supposé nul. L'incidence de l'avion est égale à l'angle d'attaque de l'aile.
- Le centre de poussée et le centre de gravité sont supposés confondus.
- Nous nous limitons au cas du vol rectiligne uniforme.
- Le vol est supposé symétrique
- L'incidence (α) est négligeable devant le pente aérodynamique (γ) : $\theta = \gamma$.

2.5.2 Bilan des forces exercées sur l'avion

- Le poids : $\mathbf{P}$
- La poussée due aux moteurs : $\mathbf{T}$
- Les forces aérodynamique $\mathbf{R}_a$ qui peuvent se décomposer en :
 - La portance $\mathbf{L}$
 - La traînée $\mathbf{D}$

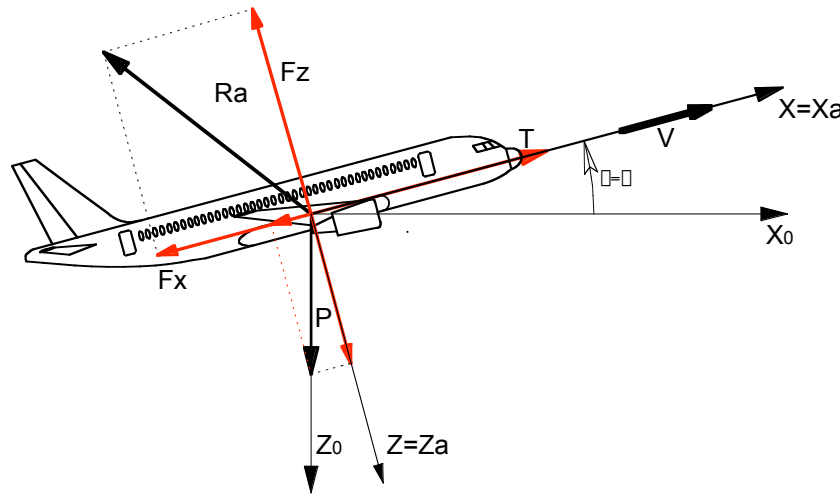


FIGURE 2.10 – Projection des différentes forces exercées sur l'avion.

2.5.3 Equation du vol en phase stationnaire

Pour déterminer les relations décrivant la phase de montée, les différentes forces sont projetées sur les axes du repère aérodynamique :

$$\text{équation de sustentation : } P \cos(\gamma) = L \quad (2.101)$$

$$\text{équation de propulsion : } T_u = D + P \sin(\gamma) \quad (2.102)$$

Dans le cas d'une montée standard pour un avion de ligne, l'angle de montée est inférieur à 10° . Il est donc possible de simplifier les deux équations précédentes :

$$\text{équation de sustentation : } P = L \quad (2.103)$$

$$\text{équation de propulsion : } T_u = D + P \sin(\gamma) \quad (2.104)$$

Il est intéressant de remarquer que l'équation de sustentation reste la même que pour le vol rectiligne horizontal. L'avion ne monte pas en raison d'une augmentation de la portance, mais grâce à une augmentation de la poussée fournie par le moteur. L'augmentation de poussée à fournir pour pouvoir monter suivant une pente γ est donnée par la relation suivante :

$$\Delta T_u = P \sin(\gamma) \quad (2.105)$$

2.5.4 Grandeurs caractéristiques

Deux grandeurs caractérisent la phase de montée pour un avion :

- la vitesse ascensionnelle v_z ;
- la pente de montée γ .

La vitesse ascensionnelle v_z

La vitesse ascensionnelle est définie de la façon suivante : en multipliant l'équation de propulsion (2.104) par V on obtient :

$$T_u \cdot V = D \cdot V + P \cdot V \sin(\gamma). \quad (2.106)$$

Il est alors possible de faire apparaître la puissance utilisée fournie par le moteur (W_u) et la puissance nécessaire à la sustentation de l'avion (W_n) :

$$W_u = W_n + P \cdot V \sin(\gamma). \quad (2.107)$$

La vitesse de montée v_z étant reliée à la vitesse V de l'avion ainsi qu'à la pente de montée γ par $v_z = V \sin(\gamma)$ on peut écrire :

$$W_u = W_n + P \cdot v_z. \quad (2.108)$$

ou encore

$$v_z = \frac{\Delta W}{P} \quad (2.109)$$

La vitesse de montée est donc directement proportionnelle à la réserve de puissance que possède l'avion.

Détermination analytique de la vitesse de montée dans le cas d'un groupe turbo-réacteur : Pour effectuer cette approche analytique, la pente de montée est supposée faible et que le facteur de charge est égal à 1. L'équation 2.27 se réduit alors à :

$$\frac{tP}{f_{max}} - \frac{P}{2f_{max}} \left(u^2 + \frac{1}{u^2} \right) - P \sin \gamma = 0 \quad (2.110)$$

ce qui donne :

$$\sin \gamma = \frac{1}{2f_{max}} \left[2t - \left(u^2 + \frac{1}{u^2} \right) \right] \quad (2.111)$$

La vitesse ascensionnelle adimensionnée s'écrit alors :

$$u \sin \gamma = \frac{1}{2f_{max}} \left[2tu - \left(u^3 + \frac{1}{u} \right) \right] \quad (2.112)$$

La vitesse de montée maximale est obtenue pour :

$$\begin{aligned} \frac{du \sin \gamma}{du} &= 0 \\ \frac{d}{du} \left(2tu - u^3 - \frac{1}{u} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (2.113)$$

ce qui donne :

$$3u^4 - 2tu^2 - 1 = 0 \quad (2.114)$$

ou encore

$$u = \sqrt{\frac{t \pm \sqrt{t^2 + 3}}{3}} \quad (2.115)$$

La vitesse de montée ascensionnelle adimensionnée maximum est donc :

$$(u \sin \gamma)_{max} = \frac{1}{2f_{max}} \left[2tu_m - \left(u_m^3 + \frac{1}{u_m} \right) \right] \quad (2.116)$$

avec

$$u_m = \sqrt{\frac{t + \sqrt{t^2 + 3}}{3}} \quad (2.117)$$

ce qui donne :

$$v_{zmax} = (V \sin \gamma)_{max} = (u \sin \gamma)_{max} V_R \quad (2.118)$$

La pente de montée γ

v_z étant la composante verticale de la vitesse de l'avion, elle est définie comme suit :

$$\sin(\gamma) = \frac{v_z}{V} \quad (2.119)$$

En utilisant la relation (2.109) on obtient :

$$\sin(\gamma) = \frac{W_u - W_n}{P.V} \quad (2.120)$$

ou encore

$$\sin(\gamma) = \frac{V.T_u}{P.V} - \frac{V.T_n}{P.V} \quad (2.121)$$

en utilisant la définition de la finesse, on trouve :

$$\sin(\gamma) = \left(\frac{T_u}{P} - \frac{1}{f} \right) \quad (2.122)$$

Dans de nombreux cas, la pente de montée étant faible (inférieure à 10°), on parle de la pente de montée en l'exprimant en pourcentage $\text{Pente}\% = 100 \sin(\gamma) \simeq 100 \tan(\gamma)$.

$$\text{Pente}\% = 100 \left(\frac{T_u}{P} - \frac{1}{f} \right) \quad (2.123)$$

Détermination analytique de la pente de montée dans le cas d'un groupe turboréacteur : Pour effectuer cette approche analytique, nous allons supposer que la pente de montée est faible et que le facteur de charge est égal à 1. L'équation 2.27 se réduit alors à :

$$\frac{tP}{f_{max}} - \frac{P}{2f_{max}} \left(u^2 + \frac{1}{u^2} \right) - P \sin \gamma = 0 \quad (2.124)$$

ce qui donne :

$$\sin \gamma = \frac{1}{2f_{max}} \left[2t - \left(u^2 + \frac{1}{u^2} \right) \right] \quad (2.125)$$

La pente de montée maximum est obtenue quand :

$$\begin{aligned} \frac{d \sin \gamma}{du} &= -\frac{1}{2f_{max}} \left(2u - \frac{2}{u^3} \right) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.126)$$

L'angle de montée maximum est obtenu pour :

$$u = 1 \quad (2.127)$$

ce qui correspond à $V = V_R$. Nous obtenons donc pour la pente maximal de montée :

$$\gamma_{max} = \sin^{-1} \left(\frac{t-1}{f_{max}} \right) \quad (2.128)$$

2.5.5 Utilisation des diagrammes

La vitesse ascensionnelle v_z et la pente de montée peuvent être facilement déterminées à partir des diagrammes "planeur" / "moteurs".

Cas des groupes motopropulseurs

A partir des diagrammes de la figure 2.11, nous pouvons constater que :

- la vitesse ascensionnelle v_z est maximale pour la valeur maximale du surplus de puissance ΔW ;
- la vitesse maximale de montée est obtenue pour une pente de montée γ inférieure à γ_{max} ;
- la pente de montée maximale est obtenue pour un angle d'incidence supérieur à α_3 ;
- quand la réserve de puissance est nulle, $\Delta W = 0$, la vitesse de montée est nulle, l'avion vole en palier ;
- le plafond de propulsion, altitude maximale de vol accessible en ne tenant compte que des problèmes de propulsion, est obtenu pour l'incidence $\alpha = \alpha_3$.

cas du turboréacteur

Dans le cas d'une motorisation à base de turboréacteurs, la figure 2.12 permet de tirer les conclusions suivantes :

- La vitesse de montée maximale est obtenue quand la réserve de puissance est maximale ;
- la pente de montée maximale γ_{max} est obtenue pour l'incidence finesse maximale α_2 , ce qui est parfaitement cohérent avec la formule 2.122 ;

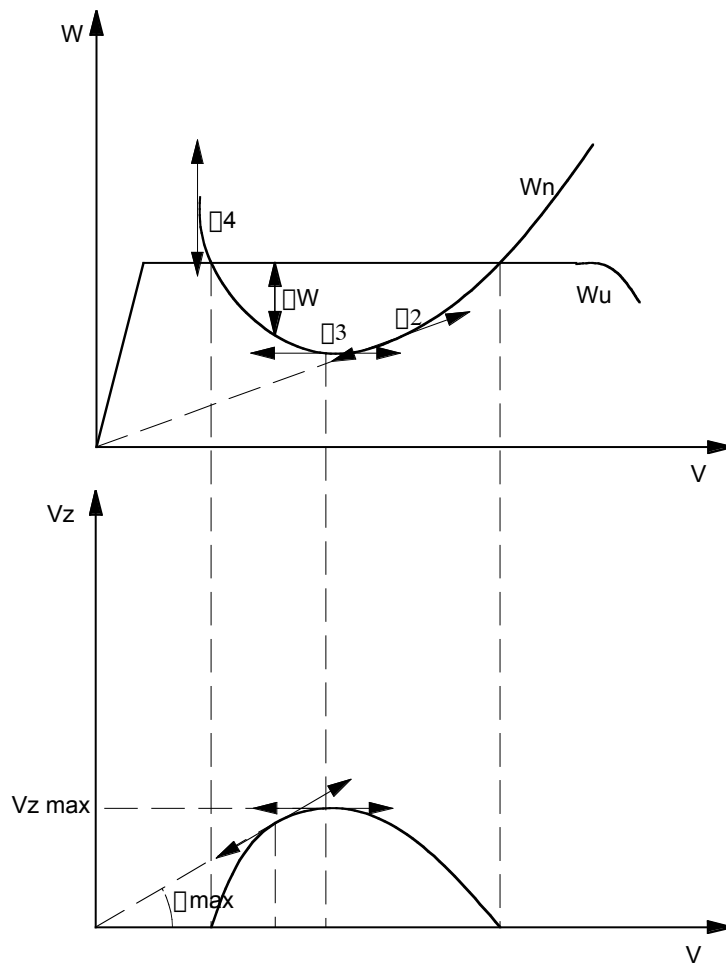


FIGURE 2.11 – Utilisation du diagramme de puissance dans le cas d'un groupe motopropulseur pour déterminer v_z et la pente de montée γ .

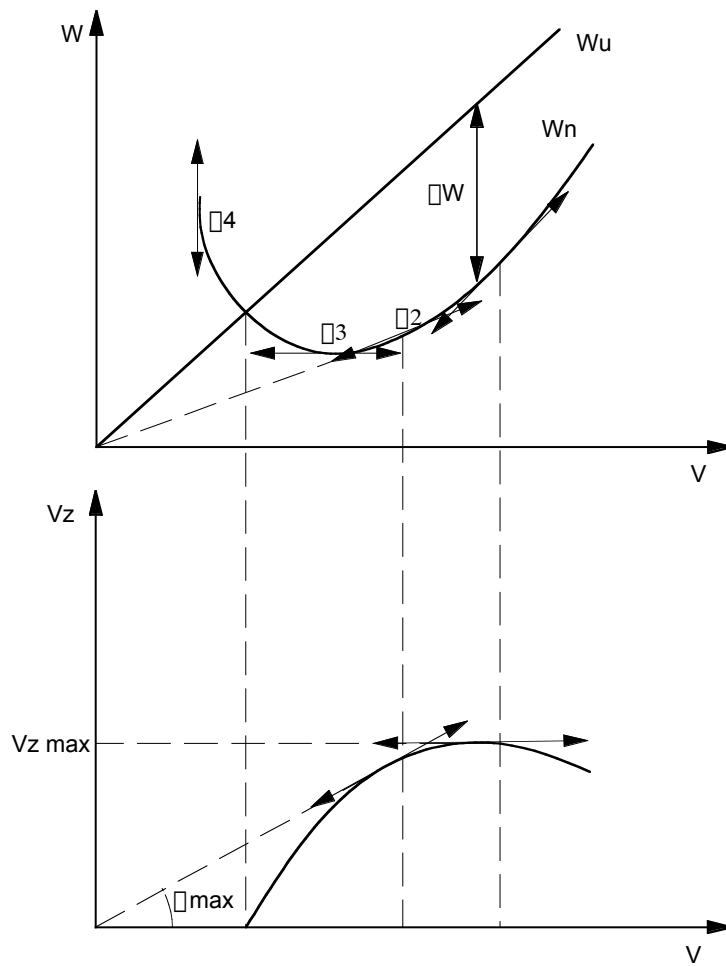


FIGURE 2.12 – Utilisation du diagramme de puissance dans le cas d'un turboréacteur pour déterminer v_z et la pente de montée γ .

Détermination des plafonds de propulsion

Pour déterminer le plafond de propulsion d'un avion, il suffit de reprendre les diagrammes précédents et d'y faire figurer les différentes courbes moteurs tenant compte de l'altitude de vol. Dans le cas d'un groupe motopropulseur le plafond de propulsion est obtenu pour l'incidence de vol α_3 correspondant W_{nmin} (voir figure 2.13), alors que dans le cas d'un avion équipé de turboréacteur le plafond de propulsion est obtenu en volant à l'incidence de finesse maximale $\alpha = \alpha_2$ (voir figure 2.14)

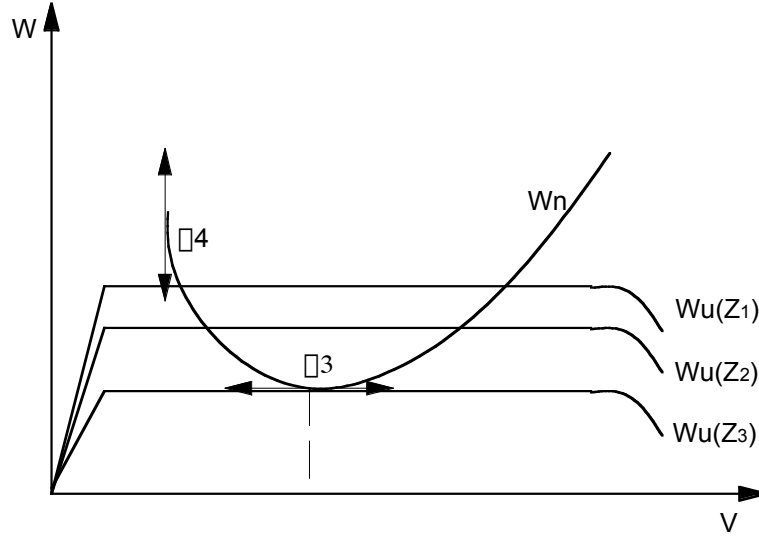


FIGURE 2.13 – Utilisation du diagramme de puissance dans le cas d'un groupe motopropulseur pour déterminer le plafond de propulsion avec $Z_1 < Z_2 < Z_3$.

2.5.6 Montée non-uniforme : Méthode de l'énergie totale

Dans le cas d'une montée à vitesse non constante, les équations 2.6, 2.7, 2.10 et 2.11 s'écrivent :

$$T - D - P \sin \gamma = \frac{P}{g} \frac{dV}{dt} \quad (2.129)$$

$$L - P \cos \gamma = \frac{P}{g} V \frac{d\gamma}{dt} \quad (2.130)$$

$$\dot{x} = V \cos \gamma \quad (2.131)$$

$$\dot{h} = V \sin \gamma \quad (2.132)$$

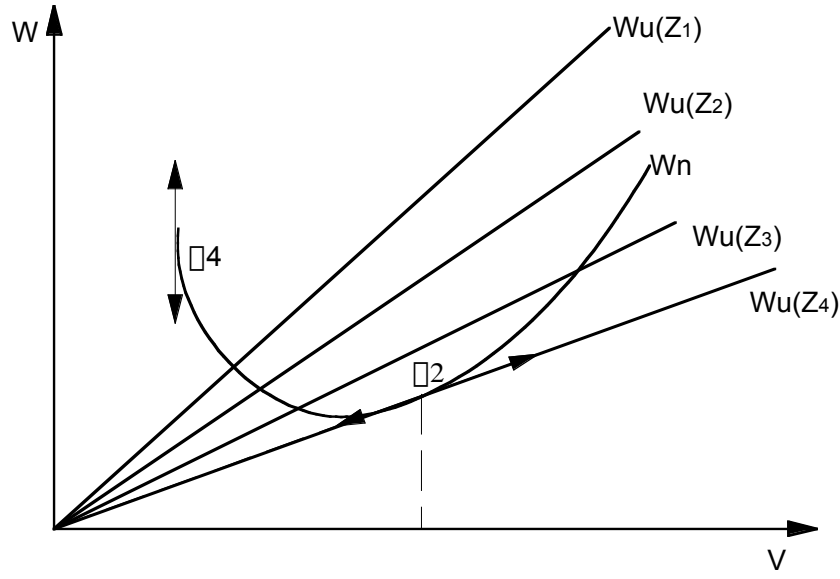


FIGURE 2.14 – Utilisation du diagramme de puissance dans le cas d'un turboréacteur pour déterminer le plafond de propulsion avec $Z_1 < Z_2 < Z_3 < Z_4$.

L'équation 2.129 peut aussi s'écrire :

$$\frac{T - D}{P} - \sin \gamma = \frac{1}{g} \frac{dV}{dt} \quad (2.133)$$

ou encore

$$V \left(\frac{T - D}{P} \right) - V \sin \gamma = \frac{1}{2g} \frac{dV^2}{dt} \quad (2.134)$$

Il est donc possible de définir la hauteur totale h_t

$$h_t = h + \frac{V^2}{2g} \quad (2.135)$$

A partir de 2.132, 2.134 et 2.135 on obtient :

$$\frac{dh_t}{dt} = V \left(\frac{T - D}{P} \right) = W_s \quad (2.136)$$

où W_s représente l'excès de puissance ramené au poids de l'avion. Le temps pour passer d'une altitude totale h_{t_i} à une altitude totale h_{t_f} donnée est obtenu par :

$$t = \int_{h_{t_i}}^{h_{t_f}} \frac{dh_t}{W_s} \quad (2.137)$$

Il est particulièrement important pour un avion de pouvoir minimiser ce temps de montée. Dans le cas des avions commerciaux, le pilote doit pouvoir dégager le plus rapidement possible l'espace aérien de l'aéroport d'où il vient de décoller et rejoindre son altitude de vol où sa consommation de carburant est minimale. Concernant les avions de chasse, on comprend très bien l'avantage que peut avoir un intercepteur à minimiser le temps qu'il met à rejoindre une altitude donnée.

Il est possible de minimiser cette intégrale à partir d'une approche graphique. Pour cela, il faut tracer, les iso-excès de puissance ramenée au poids, W_s sur un graphique (V, h) .

Temps de montée minimum : cas de l'avion subsonique

En utilisant l'hypothèse de montée stationnaire que nous avons faite au début de cette section, le temps de montée minimum est obtenu quand à chaque instant la vitesse ascensionnelle, v_z est maximale. La trajectoire correspondant à cette solution est donnée sur la figure 2.15 (trajectoire entre A et B). La solution obtenue montre que, dans ce cas, l'avion ne vole pas à vitesse constante ce qui est en contradiction avec les hypothèses de vol stationnaire.

Pour corriger cette erreur, il faut utiliser la méthode de l'énergie totale. Dans ce cas, l'étude de la formule 2.137 permet de déduire que pour minimiser le temps de montée, il faut que pour chaque valeur d'altitude totale h_t , l'excès de puissance soit maximum ce qui minimise le terme dh_t/W_s . La trajectoire ainsi obtenue est représentée sur la figure 2.15 par la courbe AB'. L'ensemble des points de la courbe AB' correspondent localement aux endroits où les iso-altitude totale sont tangents aux iso-excès de puissance.

Dans le cas des avions subsoniques, ces deux trajectoires sont assez proches ce qui rend l'approximation faite dans le cas du vol stationnaire tout à fait valable ?.

Temps de montée minimum : cas de l'avion supersonique

Le cas des avions supersoniques est assez différents de celui des avions subsoniques. Nous nous limiterons, ici, aux cas avions supersoniques d'ancienne génération qui étaient limités en excès de puissance dans les phases transsonique et supersonique. Cette caractéristique se traduit sur la figure 2.16.

Dans la zone subsonique, les iso- W_s sont identiques à ceux des avions subsoniques. Par contre dans les zones transsonique et supersonique, la limitation en excès de puissance disponible se traduit par des discontinuités des iso- W_s comme il est possible de le voir sur la figure 2.16.

Pour déterminer la trajectoire correspondant au temps de montée minimum, il faut identifier une trajectoire qui soit caractérisée par une évolution croissante de l'altitude totale tout en assurant que localement l'excès de puissance de maximum. Pour ce faire dans la zone subsonique, l'avion doit suivre la même trajectoire qu'un avion subsonique standard, trajectoire entre A et B sur la figure 2.16. Une fois en B, l'avion continue sa progression suivant une iso- h_t jusqu'en C, où il rejoint une nouvelle iso- W_s . Durant cette phase de vol, l'avion cesse de monter pour perdre d'altitude en accélérant, atteignant ainsi des vitesses supersoniques. Une fois en C, l'avion reprend sa montée en suivant la trajectoire C-D en volant à une vitesse supersonique. Arrivé en D l'avion change une nouvelle fois d'attitude pour rejoindre sa destination finale E. Durant cette dernière phase, l'avion monte en décélérant. Cette trajectoire, bien que particulièrement peu intuitive, est la façon la plus rapide, en raison de la limitation en excès de poussée, de rejoindre le point E depuis le point A. Dans le cas des intercepteurs modernes, il n'y a plus de problème manque d'excès de puissance ce qui fait disparaître toutes les discontinuités des iso- W_s . La minimisation du temps de montée devient alors similaire au cas des avions subsoniques. La vitesse

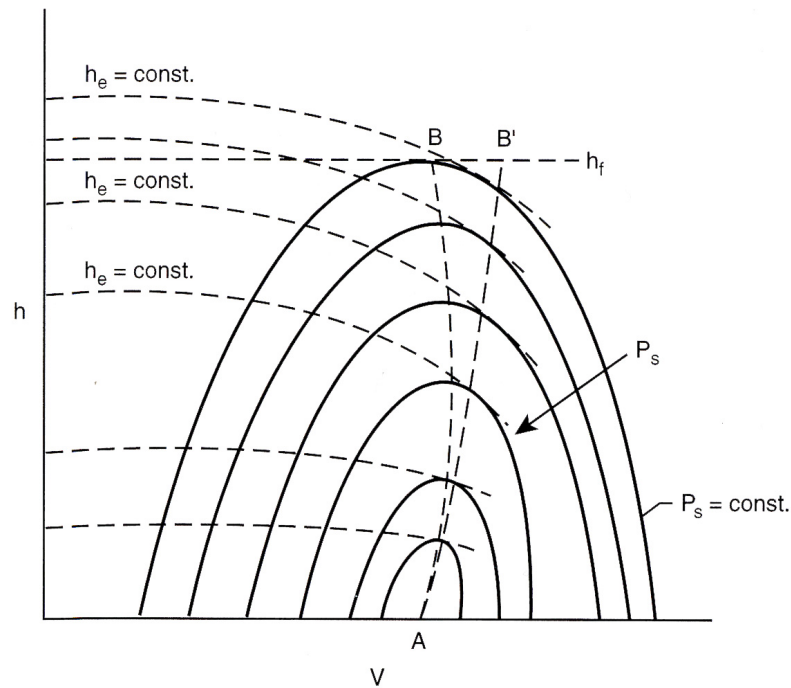


FIGURE 2.15 – Trajectoire pour minimiser le temps de montée d'un avion subsonique [of ?].

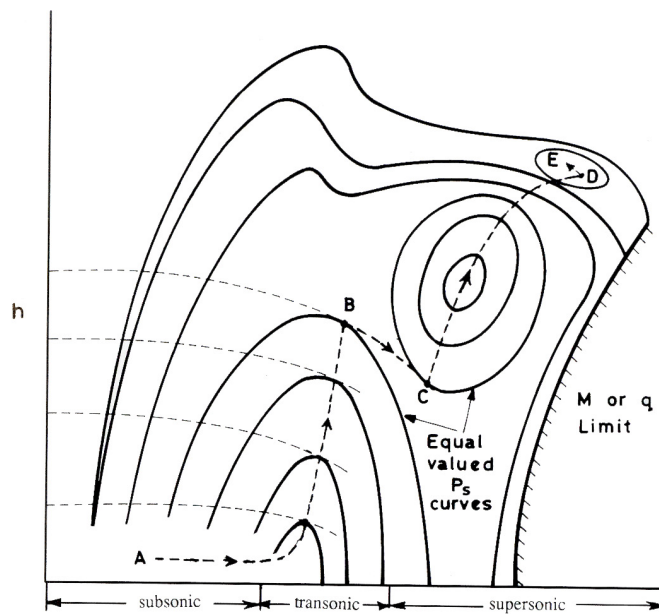


FIGURE 2.16 – Trajectoire pour minimiser le temps de montée d'un avion supersonique [tirée de ?]

v_z redevient alors un critère prépondérant dans le choix d'un avion militaire. Quelques exemples de v_z sont donnés dans le tableau 2.2

Avion	Type	$v_{z_{max}}$ au niveau de la mer	Temps de montée minimum
Mirage III	Intercepteur	5.0 km/min	3 min pour 11 km
Mirage 2000	Intercepteur	14,94 km/min	2,4 min pour 14,94 km
F-111	Combat	10,94 km/min	N/A
F-4	Combat	8.534 km/min	N/A
F-14	Intercepteur	9.14 km/min	N/A
F-15	Combat	15.24 km/min	N/A
F-16	Combat	15.24 km/min	N/A

TABLE 2.2 – Performances en montée de différents avions militaires

Exemple 2.4

Un avion pesant 156 960 N est propulsé par des turboréacteurs dont la poussée totale ne varie pas avec la vitesse. La vitesse de montée maximale au niveau de la mer est obtenue pour une vitesse de vol de 152.5 ms^{-1} . La surface de l'aile est de 46 m^2 . La polaire de l'avion est donnée par : $C_x = 0.016 + 0.045C_z^2$ et $C_{z_{max}} = 1.5$. Calculer la poussée développée par le moteur au niveau de la mer, le coefficient de portance et les vitesses de vol minimale et maximale au niveau de la mer. Calculer le plafond de propulsion en supposant que la poussée varie avec l'altitude comme suit : $T = T_0\sigma^{0.6}$. Nous avons donc : $P = 156\,960 \text{ N}$, $S = 46 \text{ m}^2$, $C_{x_0} = 0.016$, $k = 0.045$, $C_{z_{max}} = 1.5$, $\rho_0 = 1.225 \text{ kg/m}^3$ et $(v_z)_{max} = 152.5 \text{ ms}^{-1}$.

Nous avons :

$$f_{max} = \frac{1}{2\sqrt{kC_{x_0}}} = \frac{1}{2\sqrt{0.045 * 0.016}} = 18.64$$

et

$$V_R = \sqrt{\frac{2P}{\rho S}} \sqrt[4]{\frac{k}{C_{x_0}}} = \sqrt{\frac{2 * 156\,960}{1.225 * 46}} \sqrt[4]{\frac{0.045}{0.016}} = 96.136 \text{ m.s}^{-1}$$

ce qui donne :

$$u_m = \frac{V_{(v_z)_{max}}}{V_R} = \frac{152.5}{96.136} = 1.5863$$

comme nous l'avons vu, la vitesse ascensionnelle maximale est obtenue pour :

$$3u_m^4 - 2t_0u_m^2 - 1 = 0$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} t_0 &= \frac{f_{\max} T_0}{P} = \frac{3u_m^4 - 1}{2u_m^2} \\ &= \frac{3(1.5863)^4 - 1}{2(1.5863)^2} = 3.5758 \end{aligned}$$

ou encore $T_0 = 30\,110.6790$ N Le coefficient de portance est donné par :

$$C_z = \frac{2P}{\rho S (V_{(V_z)_{\max}})^2} = 0.2370$$

Les vitesses de vol minimale et maximale sont obtenues comme suit :

$$u_{\max} = \sqrt{t_0 + \sqrt{t_0^2 - 1}} = 2.6474$$

$$V_{\max} = u_{\max} V_R = 254.51 \text{ m.s}^{-1}$$

et

$$u_{\min} = \sqrt{t_0 - \sqrt{t_0^2 - 1}} = 2.6474$$

$$V_{\min} = u_{\min} V_R = 36.31 \text{ m.s}^{-1}$$

comme à chaque fois, il faut vérifier si la vitesse minimale n'est pas inférieure à la vitesse de décrochage :

$$V_{\text{dec}} = \sqrt{2P} \rho S C_{z_{\max}} = 60.6135 \text{ m.s}^{-1}$$

il est donc impossible pour l'avion de voler à $V_{\min}$.

Quand l'avion vole à son plafond de propulsion, il n'a plus de réserve puissance, il vole donc à finesse maximale pour minimiser la traînée. Dans ce cas nous avons $t = 1$, ce qui donne :

$$t = \frac{t_0 \sigma^{0.6} f_{\max}}{P}$$

ou encore

$$\sigma = \left(\frac{tP}{T_0 f_{\max}} \right)^{1/0.6} = 0.1196$$

En utilisant la table d'atmosphère standard, nous trouvons une altitude de 16 800 m comme plafond de propulsion.

2.6 Vol en descente

2.6.1 Hypothèses

- L'angle de calage de la voilure est supposé nul. L'incidence de l'avion est égale à l'angle d'attaque de l'aile.
- Le centre de poussée et le centre de gravité sont supposés confondus.
- L'étude est limitée au cas du vol rectiligne uniforme.
- Le vol est supposé symétrique
- L'incidence (α) est négligeable devant le pente aérodynamique (γ) : $\theta = \gamma$.

2.6.2 Bilan des forces exercées sur l'avion

- Le poids : $\mathbf{P}$
- La poussée due aux moteurs : $\mathbf{T}$
- Les forces aérodynamique $\mathbf{R}_a$ qui peuvent se décomposer en :
 - La portance $\mathbf{L}$
 - La traînée $\mathbf{D}$

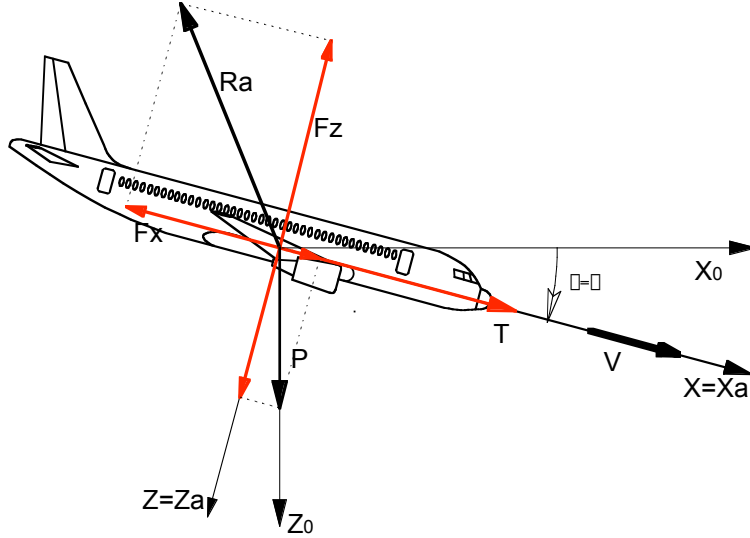


FIGURE 2.17 – Projection des différentes forces exercées sur l'avion.

2.6.3 Equation du vol en phase stationnaire

A partir des hypothèses énoncées précédemment, il est possible de réécrire les équations 2.6, 2.7, 2.10 et 2.11 comme suit :

$$P \cos(\gamma) = L \quad (2.138)$$

$$T_u - P \sin(\gamma) = D \quad (2.139)$$

$$\dot{x} = V \cos \gamma \quad (2.140)$$

$$\dot{h} = V \sin \gamma \quad (2.141)$$

Comme dans le cas de la montée, lors d'une descente standard pour un avion de ligne l'angle de descente est inférieur à 10 degrés. Il est donc possible de simplifier les deux équations précédentes :

$$P = L \quad (2.142)$$

$$T_u - P \sin(\gamma) = D \quad (2.143)$$

$$\dot{x} = V \quad (2.144)$$

$$\dot{h} = V \sin \gamma \quad (2.145)$$

Il est intéressant de remarquer que si l'on coupe les moteurs ($T_u = 0$) le système d'équation qui décrit la descente de l'avion est celui d'un planeur.

Deux grandeurs caractérisent la phase de montée pour un avion :

- la vitesse de chute ou taux de chute v'_z ;
- la pente de descente γ .

2.6.4 La vitesse de chute v'_z

La vitesse de chute est définie de la façon suivante : en multipliant l'équation de propulsion (2.143) par V on obtient :

$$T_u \cdot V - P \cdot V \sin(\gamma) = D \cdot V. \quad (2.146)$$

Il est alors possible de faire apparaître la puissance utile fournie par le moteur (W_u) et la puissance nécessaire à la sustentation de l'avion (W_n) :

$$W_u - P \cdot V \sin(\gamma) = W_n. \quad (2.147)$$

La vitesse de chute v'_z étant reliée à la vitesse V de l'avion ainsi qu'à la pente de descente γ par $v'_z = V \sin(\gamma)$ on peut écrire :

$$W_u - P \cdot v'_z = W_n. \quad (2.148)$$

ou encore

$$v'_z = \frac{\Delta W'}{P} \quad (2.149)$$

La vitesse chute est donc directement proportionnelle au manque de puissance de l'avion, $\Delta W' = W_u - W_n$.

2.6.5 La pente de descente γ

Si la pente de montée est inférieure à 10 degrés, il est possible d'écrire :

$$\tan(\gamma) = \frac{v'_z}{V} \quad (2.150)$$

En utilisant la relation (2.149) on obtient

$$\tan(\gamma) = \frac{W_u - W_n}{P \cdot V} \quad (2.151)$$

ou encore

$$\tan(\gamma) = \frac{V \cdot T_u}{P \cdot V} - \frac{V \cdot T_n}{P \cdot V} \quad (2.152)$$

en utilisant (2.72) on trouve

$$\tan(\gamma) = \left(\frac{T_u}{P} - \frac{1}{f} \right) \quad (2.153)$$

Dans de nombreux cas, on parle de la pente de descente en l'exprimant en pourcentage $\text{Pente}\% = 100 \tan(\gamma)$.

$$\text{Pente}\% = 100 \left(\frac{T_u}{P} - \frac{1}{f} \right) \quad (2.154)$$

2.6.6 Utilisation des diagrammes

A partir des diagrammes "planeur" et "moteur", il est possible de déterminer la vitesse de chute et la pente de descente en raisonnant de la même façon que pour le vol en montée.

L'analyse de la figure 2.18 permet de tirer les conclusions suivantes :

- la vitesse de chute (v'_z) diminue quand la puissance utile (W_u) augmente ;
- la pente de descente (γ) diminue quand la puissance utile (W_u) augmente ;
- la vitesse de vol correspondant à la vitesse de chute minimale reste constante en fonction de W_u ;
- la vitesse de vol correspondant à la pente de descente minimale diminue quand W_u augmente.

2.7 Facteur de charge

Dans le monde de l'aéronautique la notion de facteur de charge (n), communément appelé "nombre de g ", est particulièrement importante. n est une grandeur qui caractérise les forces liées aux accélérations que subit l'avion. Lors d'un vol stationnaire horizontal l'avion ne subit que l'accélération de la gravité, n est alors choisi égal à 1. Lors d'une ressource ou d'un virage, le facteur de charge peut considérablement augmenter. Cette augmentation provoque un accroissement des contraintes sur la structure de l'avion. Il est donc important pour chaque avion de définir un facteur de charge limite à ne jamais atteindre lors d'un vol. Ce facteur de charge limite devient alors dimensionnant pour la structure.

Il s'exprime sous la forme suivante :

$$n \cdot mg = \sum F_{ext} \quad (2.155)$$

avec

$$n = \left(\frac{mg}{mg} + \frac{F_{inertie}}{mg} \right) \quad (2.156)$$

Nous allons par la suite analyser différentes phases d'un vol et caractériser l'évolution de n qui leur est associé.

2.7.1 Virage parfait

Nous supposons dans ce cas que le virage se fait bille au milieu, le poids apparent subit par l'avion est suivant l'axe Oz. Nous négligeons les phases instationnaires d'entrée et de sortie de virage.

Bilan des forces exercées sur l'avion Les différentes forces exercées sur l'avion sont :

- le poids : $\mathbf{P}$;
- la résultante aérodynamique : $\mathbf{Ra}$,
 - la traînée : $\mathbf{D}$,
 - la portance : $\mathbf{L}$;
- les forces d'inertie : $\mathbf{F_c}$;

Le rayon de giration sera noté R . L'ensemble de ces données est regroupé sur la figure 2.19.

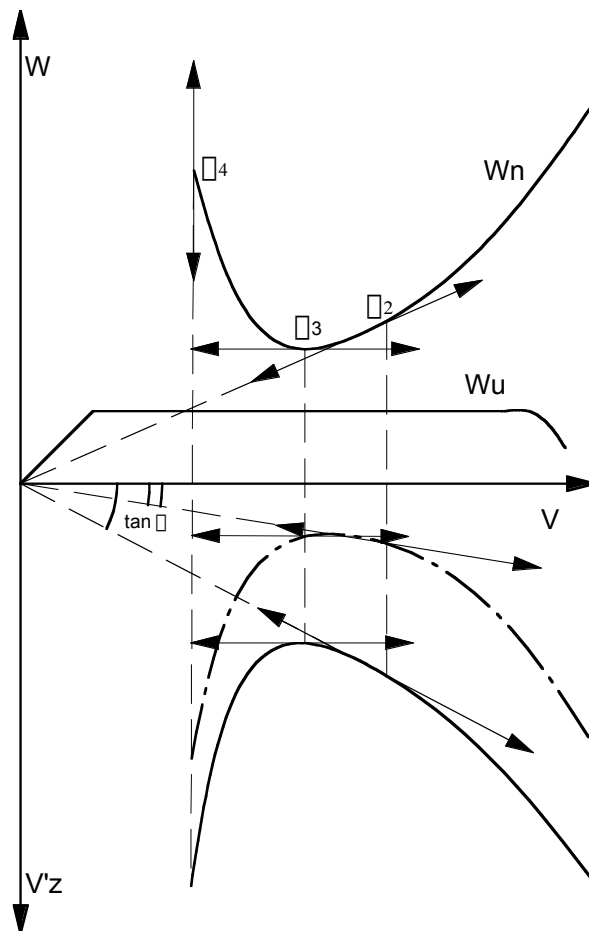


FIGURE 2.18 – Utilisation du diagramme de puissance dans le cas d'un groupe motopropulseur pour déterminer la vitesse descente (V'_z) et la pente de descente (γ). La courbe en trait plein représente la vitesse de chute dans le cas d'un planeur alors que la courbe en trait mixte correspond à la vitesse obtenue moteurs allumés.

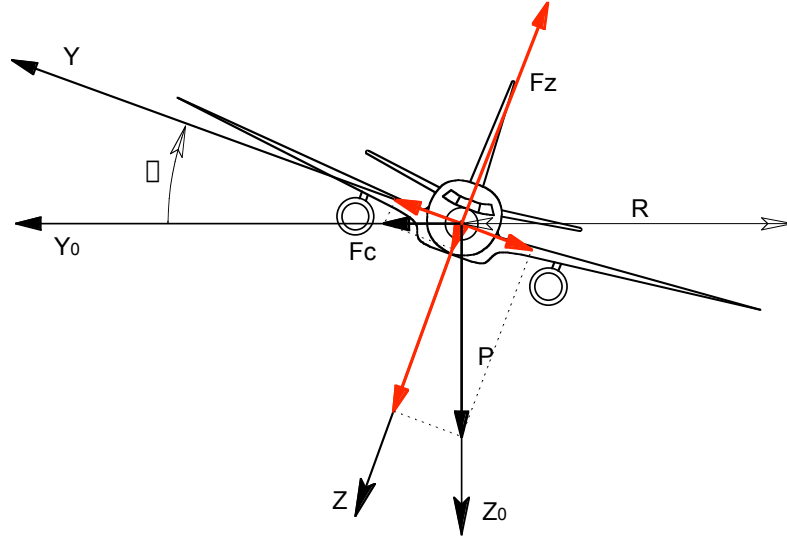


FIGURE 2.19 – Bilan des forces exercées sur l'avion lors d'un virage à altitude constante.

Calcul du facteur de charge : Pour déterminer le facteur de charge n_z (la composante suivant l'axe Oz du vecteur $\mathbf{n}$), il suffit de projeter la relation exprimant l'équilibre de l'avion sur l'axe de portance et l'axe transversal :

$$\text{axe de sustentation : } L = mg \cos(\varphi) + F_c \sin(\varphi) \quad (2.157)$$

$$\text{axe transversal : } F_c \cos(\varphi) = P \sin(\varphi) \quad (2.158)$$

On obtient alors :

$$F_c = mg \left[\cos(\varphi) + \frac{\sin^2(\varphi)}{\cos(\varphi)} \right] \quad (2.159)$$

ou encore

$$\mathbf{n}_z = \frac{1}{\cos(\varphi)} \quad (2.160)$$

Calcul du rayon de giration : Le rayon de giration associé à un facteur de charge donné et à une vitesse de vol peut être obtenu à partir de l'équation 2.158 :

$$\tan \varphi = \frac{F_c}{P}. \quad (2.161)$$

donc

$$\tan(\varphi) = \frac{V^2}{Rg} = \frac{\omega^2 R}{g} \quad (2.162)$$

avec ω la vitesse angulaire plus couramment appelée "taux de virage".

Les différents types de virage Lorsque que le pilote décide d'amorcer un virage à altitude constante, trois solutions s'offrent à lui. Pour les différencier, il est intéressant de se reporter au diagramme de puissance du couple "planeur"- "moteur". Sur ce diagramme il convient de tracer la courbe planeur correspondant à l'avion de poids P , ainsi que la courbe planeur correspondant au même avion mais de poids $n.P$ (voir figure 2.20). Cette nouvelle courbe planeur prend en compte les efforts dus aux forces d'inertie lors du virage.

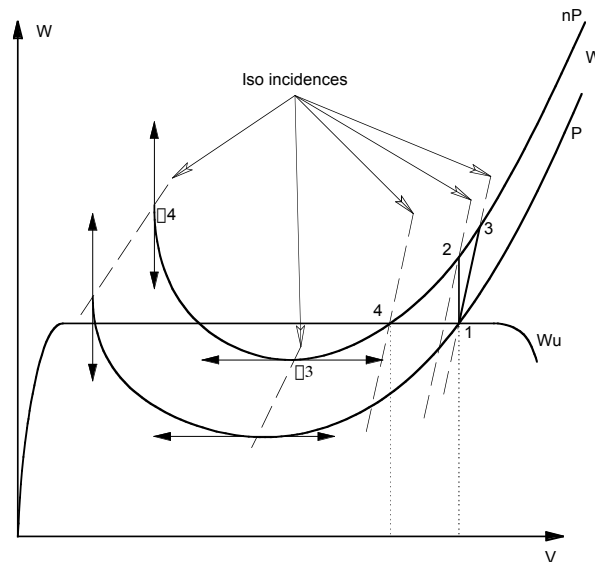


FIGURE 2.20 – Bilan des forces exercées sur l'avion lors d'un virage à altitude constante.

- Premier type de virage ($1 \rightarrow 2$) : la vitesse est constante :
le pilote doit augmenter la puissance fournie par le moteur,
le pilote doit augmenter l'incidence pour augmenter la portance.
- Deuxième type de virage ($1 \rightarrow 3$) : l'incidence reste constante :
le pilote doit augmenter la puissance fournie par le moteur,
en réaction l'avion va accélérer.
- Troisième type de virage ($1 \rightarrow 4$) : la puissance fournie par les moteurs reste constante :
le pilote doit augmenter l'incidence de l'avion,
en réaction l'avion va ralentir.

2.7.2 Le virage dérapé

Le virage est dit "dérapé" quand les forces d'inertie sont supérieures à celles exercées lors du virage parfait. Le poids apparent et donc le facteur de charge n_z sont supérieurs à ceux du virage parfait, ce qui est caractérisé par un décalage de la bille par rapport au plan de symétrie. Un schéma de principe est présenté sur la figure 2.21. Les solutions pour se rapprocher du virage parfait sont :

- diminuer les forces d'inertie ($F_c = \frac{mV^2}{R}$) :
en diminuant la vitesse,
en augmentant le rayon de giration ("le pied chasse la bille") ;

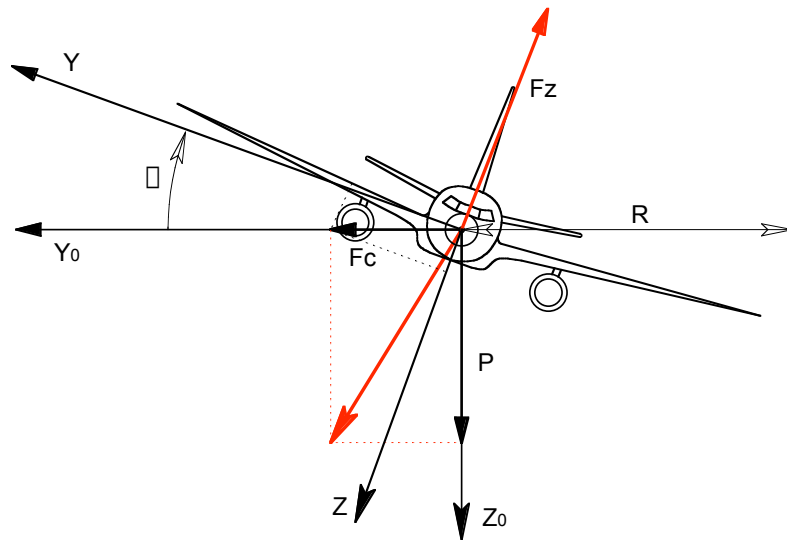


FIGURE 2.21 – Bilan des forces exercées sur l'avion lors d'un virage "dérapé" à altitude constante.

— augmenter l'angle φ .

2.7.3 Le virage glissé

Le virage est dit "glissé" quand les forces d'inertie sont inférieures à celles exercées lors du virage parfait. Le poids apparent et donc le facteur de charge n_z sont inférieurs à ceux du virage parfait, ce qui est caractérisé par un décalage de la bille par rapport au plan de symétrie. Un schéma de principe est présenté sur la figure 2.22. Les solutions pour se rapprocher du virage parfait sont :

- diminuer les forces d'inertie ($F_c = \frac{mV^2}{R}$) :
 - en augmentant la vitesse,
 - en diminuant le rayon de giration ("le pied chasse la bille") ;
- diminuer l'angle φ .

2.7.4 Le looping

Lorsqu'un avion fait un looping le facteur de charge n_z évolue tout au long de la trajectoire. Quatre points caractéristiques sont présentés sur la figure 2.23.

- en A : $n_z = 1 + \frac{V^2}{Rg}$
- en B et D : $n_z = \frac{V^2}{Rg}$
- en C : $n_z = \frac{V^2}{Rg} - 1$

2.7.5 L'arrondi

L'arrondi correspond à l'arc de cercle que déclenche le pilote pour passer de la phase de descente à l'atterrissage (voir figure 2.24). Le facteur de charge n_z au point d'impact avec le sol

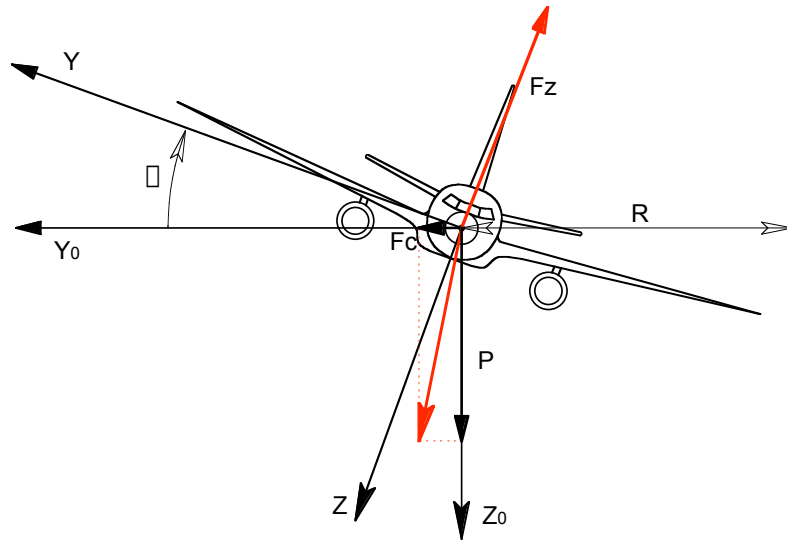


FIGURE 2.22 – Bilan des forces exercées sur l'avion lors d'un virage "glissé" à altitude constante.

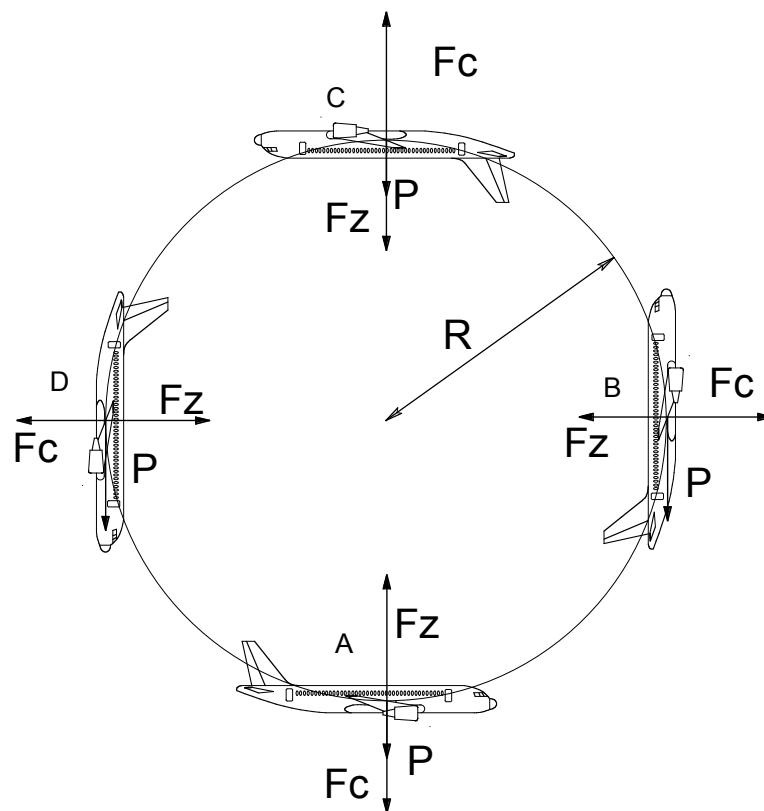


FIGURE 2.23 – Bilan des forces exercées sur l'avion lors d'un virage looping.

est :

$$n_z = 1 + \frac{V^2}{Rg} \quad (2.163)$$

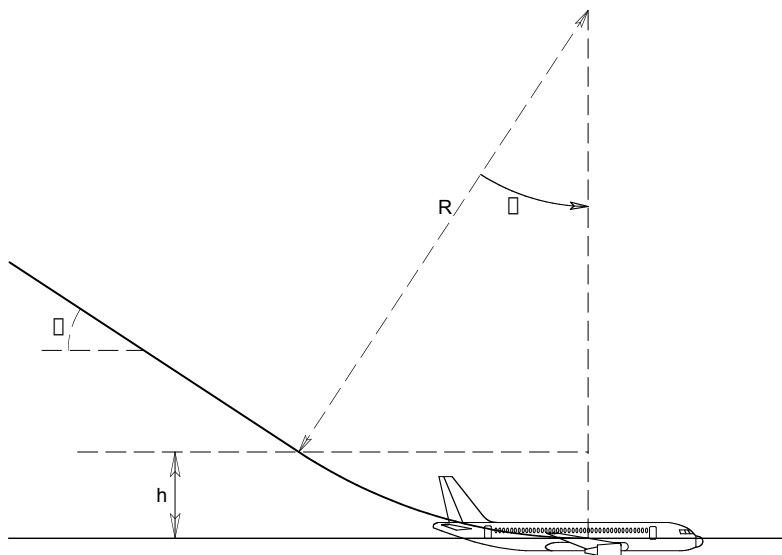


FIGURE 2.24 – Phase d’approche : arrondi.

Remarque : pour assurer le confort des passagers le facteur de charge n_z maximal admissible lors de l’atterrissage est pris égal à $n_{zmax} = 1.2$.

2.8 Rayon d’action

Le rayon d’action d’un avion correspond à la distance que peut couvrir un avion durant sa phase de vol stationnaire. Les phases de décollage et d’atterrissage ne sont pas prises en compte. Cette grandeur est particulièrement importante pour les avions destinés à faire des vols ”long courrier” tels que les Airbus A340-600 et A380 ou les Boeing 777 et 787 ainsi que pour les bombardiers comme les B1 ou les B52. Nous nous limiterons dans ce cours au cas des avions équipés de turboréacteurs. Le cas des avions à hélices sera étudié dans une prochaine version de ce manuscrit.

Les équations permettant de déterminer le rayon d’action d’un avion équipé de turboréacteurs, sont celles du vol stationnaire horizontal :

$$P = L \quad (2.164)$$

$$D = T \quad (2.165)$$

$$\dot{x} = V \quad (2.166)$$

$$\dot{h} = 0 \quad (2.167)$$

auxquelles vient se rajouter une équation caractérisant la perte de poids de l'avion au cours du temps.

$$\frac{dP}{dt} = -\dot{m}_f g = -cgT, \quad (2.168)$$

avec $\dot{m}_f$ le débit massique de fuel par unité de temps et c la consommation spécifique de fuel. c caractérise la quantité (en masse) de fuel nécessaire pour obtenir 1 Newton de poussée par unité de temps. Traditionnellement c , la consommation spécifique est exprimée en kg/(N.h). Dans le cadre de ce calcul, la perte de poids de l'avion sera uniquement due à la consommation du carburant. De même la consommation spécifique de fuel sera supposée constante à une altitude donnée.

L'équation 2.166 peut s'écrire :

$$\frac{dx}{dP} \frac{dP}{dt} = V \quad (2.169)$$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dP} &= -\frac{V}{cgT} \\ &= -\frac{V}{cgD} \end{aligned} \quad (2.170)$$

dx/dP est appelé "rayon d'action instantané" . Elle correspond pour une voiture à la consommation instantanée exprimée en litre par kilomètre.

En utilisant la relation 2.164, l'équation peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dP} &= -\left(\frac{L}{D}\right) \left(\frac{V}{cgP}\right) \\ &= -\left(\frac{C_L}{C_D}\right) \left(\frac{V}{cgP}\right) \end{aligned} \quad (2.171)$$

Pour obtenir le rayon d'action, R , il suffit d'intégrer 2.171 entre l'instant correspondant au début du vol de croisière et le moment où l'avion amorce sa descente :

$$R = - \int_{P_0}^{P_1} \left(\frac{C_L}{C_D}\right) \left(\frac{1}{cg}\right) V \frac{dP}{P} \quad (2.172)$$

avec P_0 le poids de l'avion au décollage et P_1 le poids de l'avion à l'atterrissage. Pour calculer le rayon d'action R , nous allons faire l'hypothèse que le pilote maintient l'angle d'attaque de l'avion constant. Les coefficients C_z et C_x sont alors eux aussi constants tout comme la consommation spécifique de fuel c . Seule la vitesse est donc susceptible de varier au cours du vol.

Rayon d'action à altitude et finesse constante (vitesse variable)

L'altitude étant constante, la densité de l'air ne varie pas au cours du vol. De plus l'avion perdant de la masse, il doit réduire sa vitesse pour réduire la force de portance. L'équation 2.164 permet de déterminer la vitesse de l'avion en fonction du poids :

$$V = \sqrt{\frac{2P}{\rho S C_L}} \quad (2.173)$$

2.172 et 2.173 nous donnent :

$$R = - \int_{P_0}^{P_1} \left(\frac{\sqrt{C_L}}{C_D} \right) \left(\frac{1}{cg} \right) \sqrt{\frac{2}{\rho S}} \frac{dP}{\sqrt{P}} \quad (2.174)$$

ou encore

$$R = \left(\frac{2}{cg} \right) \left(\frac{\sqrt{C_L}}{C_D} \right) \sqrt{\frac{2}{\rho S}} (\sqrt{P_0} - \sqrt{P_1}) \quad (2.175)$$

Le rayon d'action maximum, pour un poids donné de l'avion, est obtenu lorsque $(\sqrt{C_L}/C_D)$ est maximum. Un calcul simple permet de montrer que cette condition est vérifiée pour :

$$\begin{aligned} C_L &= \sqrt{\frac{C_{D_0}}{3k}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} C_L^* \end{aligned} \quad (2.176)$$

ce qui donne comme vitesse :

$$V = \sqrt[4]{3} V_R \quad (2.177)$$

Rayon d'action à vitesse et finesse constante

Dans le cas d'un vol à vitesse constante, le résultat de l'intégration de l'équation 2.172 donne :

$$R = \left(\frac{V}{cg} \right) f \ln \left(\frac{P_0}{P_1} \right) \quad (2.178)$$

Cette formule est connue sous le nom de formule de Breguet. Le rayon maximum à vitesse constante est obtenu pour la finesse maximale ce qui donne :

$$R_{max} = \left(\frac{V}{gc} \right) f_{max} \ln \left(\frac{P_0}{P_1} \right) \quad (2.179)$$

pour une vitesse de vol :

$$V_R = \sqrt{\frac{2P_0}{\rho S}} \sqrt[4]{\frac{k}{C_{D_0}}} \quad (2.180)$$

La vitesse étant constante et l'avion perdant du poids au cours du temps, celui-ci va voir son altitude augmenter durant le vol. Ce phénomène s'explique en étudiant l'équation 2.165 :

$$P = L = \frac{1}{2} \rho S V^2 C_L \quad (2.181)$$

Le poids de l'avion diminue au cours du temps, la vitesse reste constante de même que le coefficient C_L , le rayon maximum étant obtenu pour une configuration de vol à finesse maximale. La seule solution permettant d'équilibrer la portance et le poids est donc de réduire la densité ce qui est obtenu en augmentant l'altitude de vol.

Avion	Nb siège	Rayon d'action maxi
Airbus A-300	266/360	7 500 km
Airbus A-320	130/180	5 000 km
Airbus A-321	157/220	4 300 km
Airbus A-340	230/440	13 500 km
Airbus A-380	480/800	14 200/16 200 km
Concorde	90/114	6 500 km
Boeing 747	260/450	14 000 km
Boeing 777	280/303	8 700 km
DC-10	250/380	9 100 km

TABLE 2.3 – Rayon d'action maximum pour différents avions civils

Exemple 2.5

Calculer, dans le cas du Cessna Citation III, le rayon d'action à altitude constante ainsi que celui à vitesse constante. Nous choisirons une altitude de vol de 6 700 m

Nous allons tout d'abord commencer par déterminer les grandeurs dont nous aurons besoin par la suite :

$$k = \frac{1}{\pi e \lambda} = 0.044$$

Le poids à vide est :

$$P_1 = 9.81 * (8\,984 - 3\,384) = 54\,936 \text{ N}$$

$$c = 0.061/3600 = 16.99 \cdot 10^{-6} \text{ kg}/(\text{N.s})$$

Rayon d'action à altitude constante :

$$\begin{aligned} C_L &= \sqrt{\frac{C_{x0}}{3k}} \\ &= \sqrt{\frac{0.02}{3 * 0.044}} \\ &= 0.39 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_D &= C_{D0} + kC_L^2 \\ &= 0.02 + 0.044 * (0.39)^2 \\ &= 0.027 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R &= \left(\frac{2}{cg} \right) \left(\frac{\sqrt{C_L}}{C_D} \right) \sqrt{\frac{2}{\rho S}} (\sqrt{P_0} - \sqrt{P_1}) \\ &= \left(\frac{2}{16.99 \cdot 10^{-6} * 9.81} \right) \left(\frac{\sqrt{0.39}}{0.027} \right) \sqrt{\frac{2}{0.6102 * 29.5}} (\sqrt{8984 * 9.81} - \sqrt{54936}) \\ &= 5\,848 \text{ km} \end{aligned}$$

Rayon d'action à vitesse constante :

La vitesse de vol est :

$$\begin{aligned} V_R &= \sqrt{\frac{2P_0}{\rho S}} \sqrt[4]{\frac{k}{C_{D_0}}} \\ &= \sqrt{\frac{2 * 8984 * 9.81}{0.6102 * 29.5}} \sqrt[4]{\frac{0.044}{0.02}} \\ &= 120 \text{ m.s}^{-1} \end{aligned}$$

le vol se fait à finesse maximum :

$$\begin{aligned} f_{\max} &= \frac{1}{2\sqrt{kC_{D_0}}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{0.044 * 0.02}} \\ &= 16.85 \end{aligned}$$

Le rayon d'action est alors :

$$\begin{aligned} R_{\max} &= \left(\frac{V}{gc}\right) f_{\max} \ln\left(\frac{P_0}{P_1}\right) \\ &= \left(\frac{120}{9.81 * 16.99 * 10^{-6}}\right) 16.85 \ln\left(\frac{8984 * 9.81}{54936}\right) \\ &= 5\,734 \text{ km} \end{aligned}$$

2.9 L'endurance

L'endurance correspond au temps qu'un avion est capable de rester en vol. L'endurance peut être un critère prépondérant pour certains types d'avions. Ainsi dans le cas d'un patrouilleur dont la mission est de surveiller une zone proche d'un aéroport, il est plus important de pouvoir rester longtemps en vol plutôt que de tenter la distance parcourue. L'endurance pour un avion équipé de turboréacteurs peut être déterminé comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= -cgT \\ dt &= -\frac{dP}{cgT} \\ dt &= -\frac{dP}{cg} \frac{P}{T} \frac{1}{P} \end{aligned} \tag{2.182}$$

soit

$$dt = \left(\frac{1}{cg}\right) f\left(\frac{dP}{P}\right) \tag{2.183}$$

ou encore

$$t = - \int_{P_0}^{P_1} \left(\frac{1}{cg}\right) f\left(\frac{dP}{P}\right) \tag{2.184}$$

ce qui donne si l'on suppose l'angle d'attaque constant lors du vol un temps de vol maximum :

$$t_{max} = \left(\frac{1}{cg} \right) f_{max} \ln \left(\frac{P_0}{P_1} \right) \quad (2.185)$$

L'altitude n'influence pas directement le temps de vol maximum d'un avion, mais en fait elle apparaît indirectement dans l'équation précédente au travers de la consommation spécifique fuel qui, elle, évolue en fonction de l'altitude de vol.

Exemple 2.6

Calculer l'endurance maximum du Cessna Citation III.

$$\begin{aligned} t_{max} &= \left(\frac{1}{cg} \right) f_{max} \ln \left(\frac{P_0}{P_1} \right) \\ &= \left(\frac{1}{9.81 * 16.99 * 10^{-6}} \right) 16.85 \ln \left(\frac{8984 * 9.81}{54936} \right) \\ &= 47\,786 \text{ s} \\ &= 13.3 \text{ h} \end{aligned}$$

2.10 Décollage et atterrissage

Les phases de décollage et d'atterrissage bien que négligeables en temps par rapport au temps total de vol sont des phases critiques lors d'un vol. Il convient donc de les étudier.

2.10.1 Le décollage

Pour la plupart des avions, le décollage se déroule en trois phases successives :

- le pilote met plein gaz. L'avion accélère jusqu'à obtenir la vitesse de décollage,
- le pilote amorce une rotation de l'avion qui, en soulevant le nez de l'avion, permet d'augmenter son incidence jusqu'à obtenir une portance suffisante pour compenser son poids,
- l'avion entame alors sa montée. La phase de décollage est considérée comme finie lorsque l'avion atteint une hauteur, h , imposée par la réglementation (la FAR impose $h = 35$ ft alors que la RAE (UK) impose $h = 50$ ft).

Calcul de la distance au sol

Les forces s'exerçant sur l'avion sont les suivantes :

- la poussée T ,
- la trainée D ,
- la portance L ,
- le poids P ,
- les forces de frottement $\mu(P - L)$ où μ est le coefficient de frottement entre les roues et la piste. Pour des pistes en béton, μ varie entre 0,02 et 0,05, alors que pour une piste de herbe, μ est de l'ordre de 0.1.

La projection des forces sur l'axe horizontal donne :

$$\frac{P}{g} \frac{dV}{dt} = T - D - \mu(P - L) \quad (2.186)$$

Dans un premier temps, nous allons négliger l'ensemble des forces de frottement (la traînée et la résistance de roulement) et supposer que la poussée est indépendante de la vitesse et ne dépend que de la densité ($T = T_0\sigma$). L'équation 2.186 devient alors :

$$\begin{aligned}\frac{P}{g} \frac{dV}{dt} &= T \\ \frac{P}{g} V \frac{dV}{ds} &= T\end{aligned}\tag{2.187}$$

ou encore

$$ds = \frac{P}{2Tg} dV^2\tag{2.188}$$

ce qui donne une fois intégrée :

$$s_{\text{déc}} = \frac{P}{T} \frac{V_{\text{déc}}^2}{2g}\tag{2.189}$$

Pour des raisons de sécurité, la vitesse de décollage est généralement choisie égale à 1.2 fois la vitesse de décrochage :

$$V_{\text{déc}} = 1.2 \sqrt{\frac{2P}{\rho S C_{L_{\text{max}}}}}\tag{2.190}$$

on obtient alors :

$$s_{\text{déc}} = \frac{P}{T} \frac{1.44(P/S)}{\rho_0 \sigma g C_{L_{\text{max}}}} = \frac{P}{T_0} \frac{1.44(P/S)}{\rho_0 \sigma^2 g C_{L_{\text{max}}}}\tag{2.191}$$

Cette équation, bien que très simplifiée permet d'étudier l'influence des différents paramètres qui influencent le décollage. Il est ainsi de possible constater que :

- la distance au sol est très sensible au poids de l'avion, variant quadratiquement avec celui-ci,
- la distance au sol dépend fortement des conditions atmosphériques locales, étant inversement proportionnelle au carré de la densité,
- la distance au sol diminue en augmentant la surface alaire (P/S), le $C_{z_{\text{max}}}$ et la poussée. L'augmentation de la surface alaire, n'est pas une solution adaptée car elle entraîne une réduction du rayon d'action de l'avion. Il en est de même pour l'augmentation de la poussée, si elle n'est obtenue par l'utilisation d'une post-combustion, car elle provoque une augmentation du poids des moteurs.

Nous allons maintenant nous intéresser à la résistance à l'avancement. Celle-ci se décompose en deux parties : la traînée aérodynamique et la résistance de roulement. La traînée aérodynamique s'exprime sous la forme suivante :

$$D = \frac{1}{2} \rho S V^2 \left(C_{D_0} + \phi \frac{C_L^2}{e\pi\lambda} \right)\tag{2.192}$$

avec le C_D qui permet de tenir compte des deux effets suivants :

- l'influence du déploiement des volets, qui provoque une augmentation de traînée par rapport à la configuration de vol standard qui est représenté par C_{x_0} ,
- l'effet de sol, qui se caractérise par une diminution de la traînée induite. Celui-ci est responsable de la tendance à "flotter" des avions au moment de l'atterrissage. Il est pris en compte dans la formule précédente par le coefficient ϕ avec $\phi < 1$. Une bonne approximation de ϕ est donnée par ? :

$$\phi = \frac{(16h/b)^2}{1 + (16h/b)^2} \quad (2.193)$$

avec h la distance entre l'aile et le sol et b l'envergure de l'aile.

La résistance de roulement, quant à elle, est proportionnelle à la différence entre le poids de l'avion et à la force de portance. Il est important de noter que lors du calcul de la force portance, il faut prendre en compte de C_L dans la configuration volets sortis et non dans la configuration standard. Elle s'écrit donc sous la forme suivante :

$$F_{roul} = \mu P - \mu \frac{1}{2} \rho S V^2 C_L \quad (2.194)$$

La résistance de roulement et la traînée aérodynamique sont toutes les deux des fonctions qui varient linéairement en fonction de V^2 . De plus, elles ont une évolution opposée quand la vitesse augmente ainsi la résistance de roulement diminue linéairement avec V^2 alors que la traînée aérodynamique augmente, elle aussi, linéairement. Une bonne approximation consiste à supposer que la somme $F_{roul} + D$ est constante en fonction de V^2 . Pour déterminer la valeur de cette constante, il est courant d'utiliser la valeur de $F_{roul} + D$ calculée pour une vitesse de $0.7 V_{déc}$ [?].

Il est donc possible de recalculer la distance de décollage en reprenant le raisonnement précédant et en y substituant la poussée T par $T - (F_{roul} + D)_{V_{déc}}$, ce qui donne :

$$s_{déc} = \frac{1.44(P/S)}{\rho_0 \sigma g C_{L_{max}}} \frac{P}{T - (D + \mu(P - L))_{0.7V_{déc}}} \quad (2.195)$$

Avion	Poids au décollage	Vitesse de décollage
Boeing 737	45 360 kg	250 km/h, 130 kts
Boeing 757	108 860 kg	260 km/h, 140 kts
Airbus A320	70 305 kg	275 km/h, 150 kts
Airbus A340	259 000 kg	290 km/h, 155 kts
Boeing 747	362 870 kg	290 km/h, 155 kts
Concorde	181 435 kg	360 km/h, 195 kts

TABLE 2.4 – Exemples de poids et de vitesse au décollage pour différents avions de ligne

Exemple 2.7

Calculer la distance nécessaire au décollage pour le Cessna Citation 3 au niveau de la mer. Nous supposons que la piste est goudronnée ($\mu = 0.02$). Le coefficient de portance lors de la phase

d'accélération sur la piste sera limité à $C_z = 1$. Durant toute cette phase, les ailes se trouvent à 1.82 m au dessus de la piste.

Pour déterminer la distance nécessaire au décollage, il convient dans un premier temps de quantifier la réduction de traînée due à l'effet de sol :

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{(16h/b)^2}{1 + (16h/b)^2} \\ &= \frac{(16 * 1.82/16.25)^2}{1 + (16 * 1.82/16.25)^2} \\ &= 0,763\end{aligned}$$

De même, il convient de calculer la vitesse de décollage $V_{\text{déc}}$:

$$\begin{aligned}V_{\text{déc}} &= 1.2 * \sqrt{\frac{2P}{\rho S C_{L_{\max}}}} \\ &= 1.2 * \sqrt{\frac{2 * 8\,984 * 9.81}{1.225 * 29.5 * 1}} \\ &= 83.8 \text{ m.s}^{-1}\end{aligned}$$

Il est alors possible de calculer la force de traînée moyenne en se basant sur la traînée obtenue pour une vitesse de $0.7V_{\text{déc}}$.

$$\begin{aligned}L &= \frac{1}{2} \rho S (0.7V_{\text{déc}})^2 C_L \\ &= \frac{1}{2} 1.225 * 29.5 * (0.7 * 83.8)^2 * 1 \\ &= 62\,189 \text{ N}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D &= \frac{1}{2} \rho S (0.7V_{\text{déc}})^2 \left(C_{D_0} + \phi \frac{C_L^2}{\pi e \lambda} \right) \\ &= \frac{1}{2} 1.225 * 29.5 * (0.7 * 83.8)^2 \left(0.02 + 0.763 \frac{1^2}{\pi * 0.81 * 16.25^2 / 29.5} \right) \\ &= 3\,332 \text{ N}\end{aligned}$$

ce qui donne pour le distance de décollage :

$$\begin{aligned}s_{\text{déc}} &= \frac{1.44(P/S)}{\rho \sigma g C_{L_{\max}}} \frac{P}{T - (F_D + \mu(P - F_L)_{0.7V_{\text{déc}}}} \\ &= \frac{1.44(8\,984 * 9.81/29.5)}{1.225 * 1 * 9.81 * 1} \frac{8\,984 * 9.81}{32\,470 - (3\,332 + 0.02(8\,984 * 9.81 - 62\,189))} \\ &= 1\,102 \text{ m}\end{aligned}$$

2.10.2 L'atterrissage

Pour traiter l'atterrissage, nous pouvons utiliser un raisonnement similaire à celui fait pour le calcul de la longueur de piste nécessaire au décollage. Une fois que l'avion a touché le sol, le

pilote coupe la poussée des moteurs ou enclenche les inverseurs de poussée, ce qui crée alors une force s'opposant au mouvement T_R . L'équation décrivant le mouvement devient alors :

$$\frac{P}{g} \frac{dV}{dt} = -T_R - D - \mu(P - L) \quad (2.196)$$

Les évolutions de la force de traînée et de la résistance de roulement, comme dans le cas du décollage, restent linéaire en fonction de V^2 et de signe opposées. De plus la force créée par les inverseurs de poussée peut être considérée comme constante. L'hypothèse, consistant à supposer que le somme de ces deux forces reste constante est donc toujours valable. Pour la calculer, il est courant de la choisir égale à la valeur de la force de résistance globale obtenue pour une vitesse de $0.7V_{imp}$, avec V_{imp} la vitesse de l'avion à l'instant où il touche le sol. Nous avons alors :

$$\frac{P}{g} \frac{dV}{dt} = -T_R - D - \mu(P - L) = -(T_R + D + \mu(P - L))_{0.7V_{imp}} \quad (2.197)$$

En utilisant le raisonnement développé dans le cas du décollage, nous obtenons pour la distance de piste nécessaire à l'atterrissage :

$$s_{att} = \frac{1.69(P/S)}{\rho_0 \sigma g C_{L_{max}}} \frac{P}{T_R + (F_{roul} + D)_{0.7V_{imp}}} \quad (2.198)$$

pour assurer la sécurité de l'avion durant cette phase critique du vol, la vitesse pendant la phase finale d'approche est choisi égale à $1.3V_{dec}$:

$$V_{imp} = 1.3 \sqrt{\frac{2P}{\rho S C_{L_{max}}}} \quad (2.199)$$

La phase de décollage n'est considérée comme finie que lorsque l'avion atteint l'altitude 50 ft.

Exemple 2.8

Estimez la longueur de piste nécessaire à l'atterrissage du Cessna Citation III sur aéroport situé au niveau de la mer. Aucune reverse n'est activée et les deux moteurs sont coupés. Les aérofreins sont sortis de sorte que la portance peut être considérée comme nulle. Le coefficient de frottement C_{D_0} est quant à lui augmenter d'environ 10%. Les réservoirs de fuel sont supposés vides. Lors de la phase d'approche les volets sont complètement sortis, ce qui permet d'obtenir au moment de l'atterrissage $C_{L_{max}} = 2.5$. Le coefficient de frottement de la piste mu est choisi égal à 0.4.

Le poids de l'avion lors de l'atterrissage est de :

$$P = (8984 - 3384) * 9.81 = 54\,942\text{N}$$

La vitesse d'approche est donnée par :

$$\begin{aligned} V_{imp} &= 1.3 \sqrt{\frac{2P}{\rho S C_{L_{max}}}} \\ &= 1.3 \sqrt{\frac{2 * 54\,942}{1.225 * 29.5 * 2.5}} \\ &= 45,34 \text{ m.s}^{-1} \end{aligned}$$

Nous devons maintenant calculer la traînée pour une vitesse de $0.7V_{imp}$, pour cela, il faut tenir de la nouvelle valeur de $C_{D0} = 0.022$ et se rappeler que la portance et la traînée sont nulles.

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{2} \rho S (0.7V_{imp})^2 C_{D0} \\ &= \frac{1}{2} 1.225 * 29.5 * (0.7 * 45.34)^2 * 0.022 \\ &= 400 \text{ N} \end{aligned}$$

Nous obtenons donc pour la longueur de piste :

$$\begin{aligned} s_{att} &= \frac{1.69(P/S)}{\rho \sigma g C_{L_{max}}} \frac{P}{(\mu P + D) 0.7V_{imp}} \\ &= \frac{1.69(54\,942/29.5)}{1.225 * 9.81 * 2.5} \frac{54\,942}{(0.4 * 54\,942 + 400)} \\ &= 257 \text{ m} \end{aligned}$$

Chapitre 3

Stabilité statique longitudinale

3.1 Moment aérodynamique longitudinal

L'étude du moment aérodynamique longitudinal est extrêmement importante dans le cadre la stabilité longitudinale d'un avion. Il dépend :

- de la voilure ;
- de l'empennage ;
- du fuselage.

Pour simplifier le début de la présentation, nous allons tout d'abord étudier un simple profil d'aile. Le coefficient C_m , qui est fonction de l'angle d'incidence, permet de déterminer le moment de forces aérodynamique au point A (voir figure 3.1).



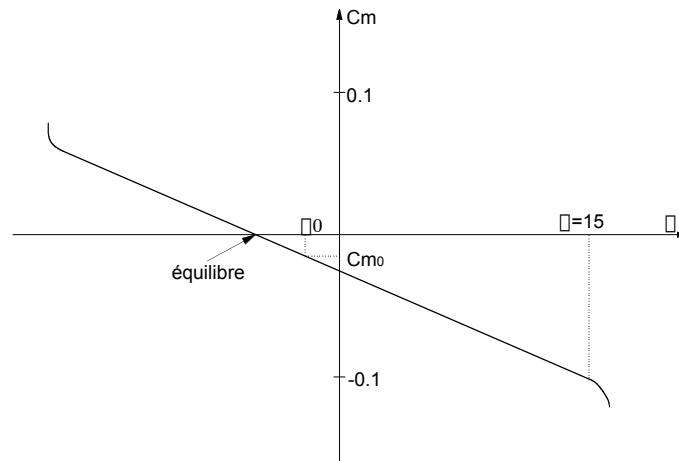
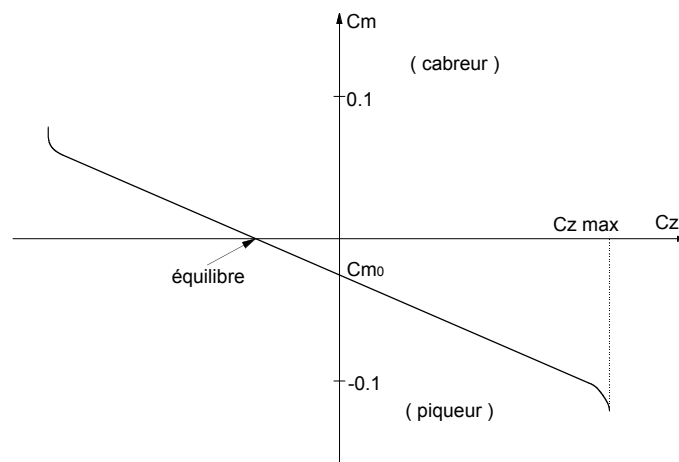
FIGURE 3.1 – convention de signes.

Par convention, on choisit :

- $C_m > 0$ donne un moment cabreur ;
- $C_m < 0$ donne un moment piqueur ;

Pour étudier la stabilité d'un avion ou d'un profil d'aile, il est intéressant de tracer la courbe $C_m = f(\alpha)$ (figure 3.2). Le profil typique pour une aile standard donne une incidence d'équilibre franchement négative. L'incidence correspondant à une portance nulle est notée : α_0 . Le moment correspondant est piqueur : $C_{m0} < 0$. Il est aussi intéressant pour rendre cette courbe parlante de tracer C_m en fonction du coefficient de portance C_L (figure 3.3). Dans la zone d'utilisation standard :

$$C_{mA} = C_{m0} - h.C_L, \quad (3.1)$$

FIGURE 3.2 – Représentation du coefficient C_m en fonction de l'incidence α .FIGURE 3.3 – Représentation du coefficient C_m en fonction du coefficient de portance C_z .

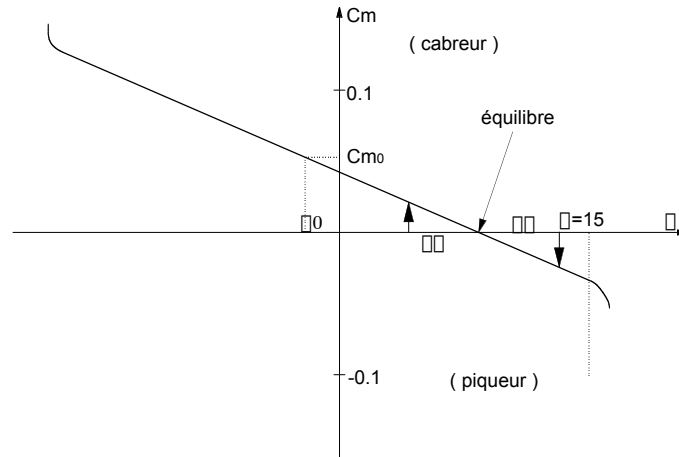


FIGURE 3.4 – Représentation du coefficient C_m en fonction de l'incidence α dans le cas d'un profil ou d'un avion stable.

avec $h = 0.25$ pour une voilure. Dans le cas présenté ici, profil simple, l'incidence d'équilibre correspond à une portance négative, ce qui est contraire au but recherché. Un profil d'aile standard est donc instable statiquement.

Il est possible de remédier à ce problème en utilisant un profil à double cambrure ou en rajoutant un empennage arrière qui va modifier le C_m de l'avion complet. Pour un profil stable l'évolution de C_m en fonction de l'incidence est donnée figure 3.4. L'incidence d'équilibre correspond à une portance positive ce qui est nécessaire, mais pas suffisant pour assurer la stabilité de l'avion. Il est aussi important de voir comment réagit l'avion s'il est soumis à une variation d'incidence ($\Delta\alpha$). Si la perturbation est négative, C_m devient positif et engendre un moment cabreur augmentant ainsi l'incidence. De même si la perturbation est positive, C_m devient négatif provoquant un moment piqueur ce qui tend à diminuer l'incidence. Toute perturbation est donc naturellement amortie, l'avion est donc statiquement stable.

3.2 Le centre de poussée aérodynamique

Le centre de poussée des forces aérodynamiques correspond au point d'application de la résultante des forces aérodynamiques sur le profil. Dans cette étude, nous supposons qu'il est situé sur la corde du profil (point E sur la figure 3.5). Nous allons nous placer dans le cas où l'incidence est faible. Il est alors possible de supposer que :

$$L = F_n. \quad (3.2)$$

Ce qui nous donne pour le moment de la force aérodynamique en A :

$$M_a = -F_n d = -F_z d. \quad (3.3)$$

De plus, nous pouvons écrire :

$$M_a = \frac{1}{2} \rho S l V^2 C_{ma} \quad \text{et} \quad L = \frac{1}{2} \rho S V^2 C_L. \quad (3.4)$$

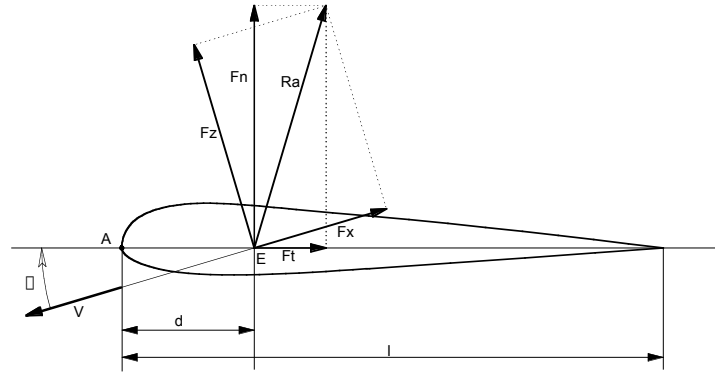


FIGURE 3.5 – Décomposition de la résultante aérodynamique.

L'équation (3.3) devient alors :

$$\frac{1}{2}\rho S l V^2 C_{ma} = -\frac{1}{2}\rho S V^2 C_L d, \quad (3.5)$$

soit :

$$C_{ma} = -C_L \frac{d}{l}. \quad (3.6)$$

En utilisant la relation (3.1), on obtient :

$$\frac{d}{l} = -\frac{C_{m0}}{C_L} + h \quad (3.7)$$

la position du centre de poussée aérodynamique (E) dépend de C_L donc de l'incidence.

Cas du profil à double courbure ($C_{m0} > 0$) :

- si l'incidence (α) augmente,
- $\Rightarrow C_L$ augmente,
- $\Rightarrow$ le rapport C_{m0}/C_L diminue,
- $\Rightarrow d$ augmente,
- $\Rightarrow$ le centre de poussée aérodynamique recule.

Cas du profil à simple courbure ($C_{m0} < 0$) :

- si l'incidence (α) augmente,
- $\Rightarrow C_L$ augmente,
- $\Rightarrow$ le rapport $|C_{m0}|/C_L$ diminue,
- $\Rightarrow d$ diminue,
- $\Rightarrow$ le centre de poussée aérodynamique avance.

3.3 Le foyer

Comme nous venons de le voir, la position du centre de poussée aérodynamique n'est pas constante quand l'incidence de l'avion varie. Ceci est problématique lorsque l'on étudie la stabilité de l'avion autour de son centre de gravité. Pour surmonter ce problème, un nouveau point caractéristique est introduit : le foyer. On introduit un nouveau point P (Fig. 3.6) où l'on

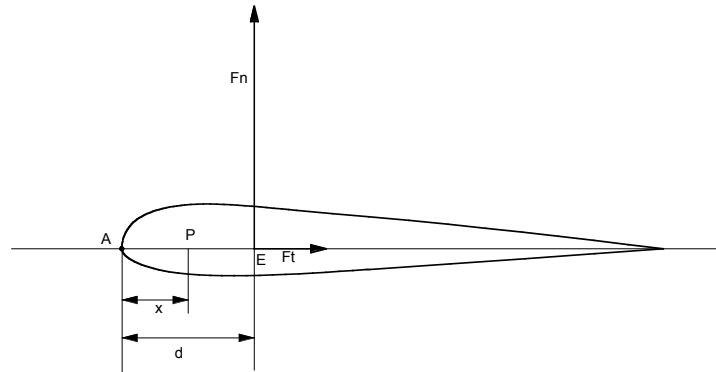


FIGURE 3.6 – Introduction de la notion de foyer.

calcule les moments

$$\begin{aligned}
 M_P &= -L(d - x) \\
 &= -Ld + Lx \\
 &= M_A + Lx
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

ce qui donne :

$$M_P = \frac{1}{2}\rho S l V^2 C_{mP} = \frac{1}{2}\rho S l V^2 C_{mA} + \frac{1}{2}\rho S V^2 C_L x \tag{3.9}$$

$$\Rightarrow C_{mP} = C_{mA} + C_L \frac{x}{l} \tag{3.10}$$

En utilisant (3.1) on obtient :

$$C_{mP} = C_{m0} + C_L \left(\frac{x}{l} - h \right), \tag{3.11}$$

Il existe donc un point P pour lequel le moment des forces aérodynamiques est indépendant de l'incidence et égal à C_{m0} . Ce point est appelé le foyer (F). Il est situé en $x_F = h.l$. Cette définition du foyer reste vraie pour des angles d'incidence modérés (Fig. 3.7).

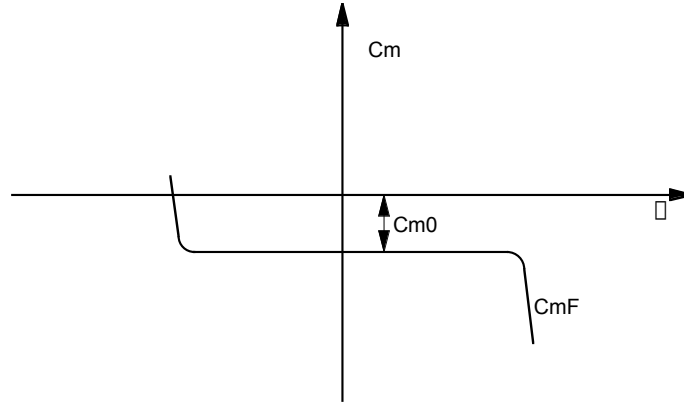


FIGURE 3.7 – Evolution du moment de forces aérodynamiques au foyer en fonction de l'incidence.

3.4 Notion de centrage : stabilité d'une aile volante

3.4.1 Cas du centrage avant :

Le centre de gravité (G) est situé en avant du foyer (F). Il y a équilibre autour de G si :

$$\sum M_G = 0 \quad (3.12)$$

$$\Rightarrow \sum M_G = M_F - xL \quad \text{avec} \quad xL > 0 \quad (3.13)$$

Il faut donc que $M_F > 0$ ce qui est le cas des profils à double courbure.

- Si α augmente alors L augmente ce qui donne un moment en G négatif donc un moment piqueur.
- Si α diminue alors L diminue ce qui donne un moment en G positif donc un moment cabreur.

L'avion est statiquement stable.

3.4.2 Cas du centrage arrière :

Le centre de gravité (G) est situé en arrière du foyer (F). Il y a équilibre autour de G si :

$$\sum M_G = 0 \quad (3.14)$$

$$\Rightarrow \sum M_G = M_F + xL \quad \text{avec} \quad xL > 0 \quad (3.15)$$

Il faut donc que $M_F < 0$ ce qui est le cas des profils simples.

- Si α augmente alors L augmente ce qui donne un moment en G positif donc un moment cabreur.
- Si α diminue alors L diminue ce qui donne un moment en G négatif donc un moment piqueur.

L'avion est statiquement instable.

3.4.3 Bilan sur la stabilité statique de l'avion

Pour qu'un avion soit stable, il faut que le moment C_{m0} soit positif et que l'avion soit centré vers l'avant. Cependant un avion instable n'est pas forcément non pilotable. Il existe en effet des systèmes de contrôle qui, intégrés à la chaîne de commande de l'avion, permettent de le stabiliser.

Les ailes volantes, pour être stables, doivent utiliser des profils à double courbure. Les avions standards utilisent des profils d'ailes simples qui sont instables. Mais il ne faut pas oublier que le moment C_{m0} est défini pour l'avion complet. Il prend donc en compte l'effet de l'empennage arrière, des canards, de la carlingue...

3.5 Test en vol de la stabilité : cas du manche bloqué

Pour déterminer en vol si un avion est statiquement stable, il faudrait tracer la courbe $M_A = f(\alpha)$. Ceci est impossible. En effet, lors d'un vol stationnaire $M_A = 0$. En dehors de la phase stationnaire, il faut mesurer $dq/dt = M_A/I$. Mais dans ce cas, la vitesse rotation est non nulle, $q \neq 0$, le terme $C_{mq}ql/v$ modifie M_A . On ne peut donc isoler la contribution de l'incidence et donc déterminer si $C_{m\alpha} < 0$.

La solution est de tracer pour différentes positions de la gouverne δ_m la courbe C_{mA} en fonction de l'incidence.

$$C_{mA} = C_{m0} + C_{m\alpha}\alpha + C_{m\delta}\delta_m \quad (3.16)$$

Un braquage positif du manche (manche avant) donne :

- $\delta_m > 0$;
- un couple piqueur négatif ;
- donc $C_{m\delta} < 0$.

Dans le cas d'un avion stable ($C_{m\alpha} < 0$) le faisceau de courbes C_{mA} , en fonction de l'incidence, est présenté sur la figure 3.8. Dans le cas d'un avion instable ($C_{m\alpha} > 0$) les courbes sont présentées sur la figure 3.9.

L'analyse de ces deux graphiques, nous permet de conclure que dans le cas d'un :

avion stable :

- si δ_m augmente,
- l'incidence d'équilibre α_{eq} diminue,
- la vitesse augmente ;

avion instable :

- si δ_m augmente,
- l'incidence d'équilibre α_{eq} augmente,
- la vitesse diminue ;

Il suffit de tracer l'évolution de la position du manche en fonction de la vitesse pour savoir si l'avion est stable ou instable. L'augmentation de la consigne de braquage donne un moment piqueur ce qui tend à faire diminuer l'incidence et donc à augmenter la vitesse. Ceci peut être résumé par la figure 3.11.

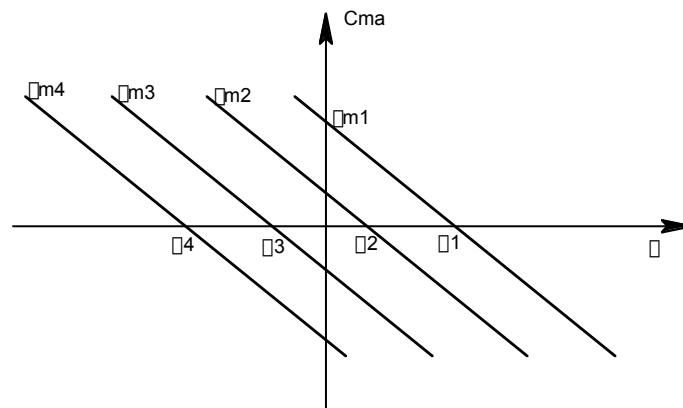


FIGURE 3.8 – Cas de l'avion stable, $\delta_{m1} < \delta_{m2} < \delta_{m3} < \delta_{m4}$.

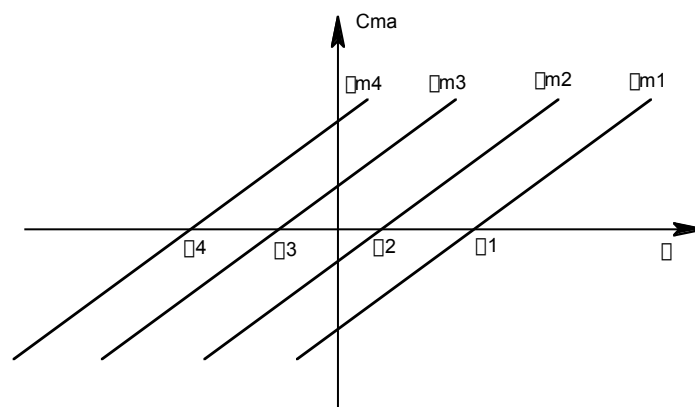


FIGURE 3.9 – Cas de l'avion instable, $\delta_{m1} < \delta_{m2} < \delta_{m3} < \delta_{m4}$.

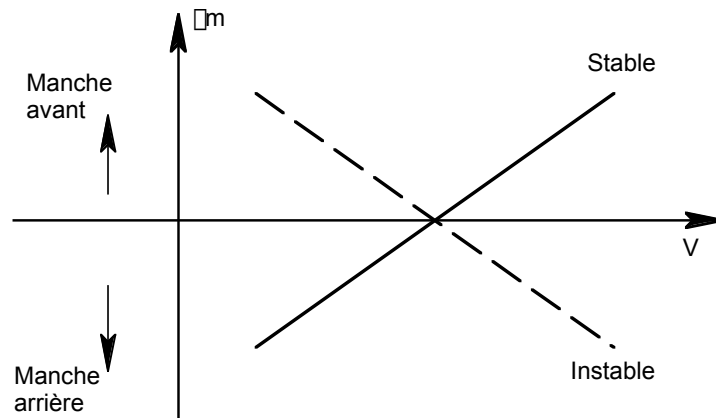
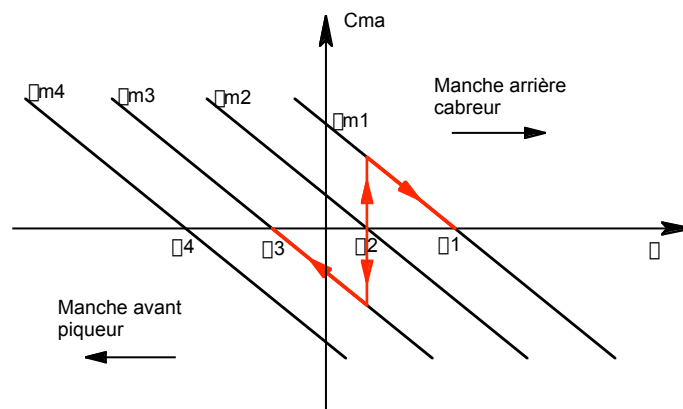


FIGURE 3.10 – Critère de stabilité en fonction de la position du manche.

3.5.1 Action du manche pour un avion stable

Pour cabrer un avion stable, il suffit de tirer sur le manche et inversement pour le faire piquer (voir figure 3.11).

FIGURE 3.11 – Critère de stabilité en fonction de la position du manche, $\delta_{m1} < \delta_{m2} < \delta_{m3} < \delta_{m4}$ dans le cas d'un avion stable.

3.5.2 Action du manche pour un avion instable

Pour cabrer un avion instable, il faut tirer sur le manche pour le mettre en rotation puis il faut arrêter ce mouvement puis repousser le manche jusqu'à une position plus avancée que la position initiale. Pour faire piquer l'avion, il faut pousser le manche, puis tirer sur le manche jusqu'à une position plus reculée que la position initiale (voir figure 3.12).

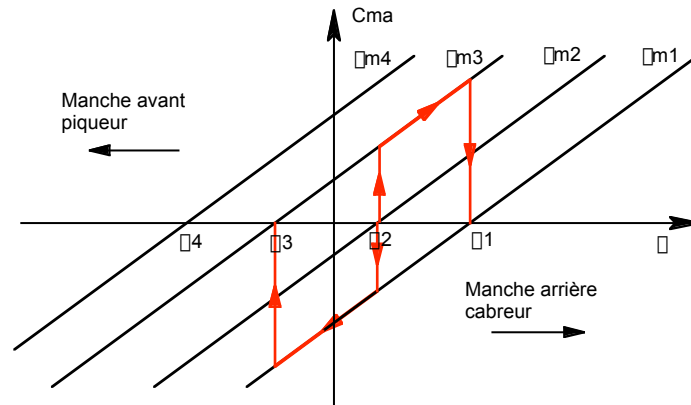


FIGURE 3.12 – Critère de stabilité en fonction de la position du manche, $\delta_{m1} < \delta_{m2} < \delta_{m3} < \delta_{m4}$ dans le cas d'un avion instable.

3.5.3 Action du manche pour un avion neutre

Pour cabrer un avion neutre, il faut tirer sur le manche puis une fois l'incidence souhaitée obtenue, il faut repousser le manche dans sa position initiale. (voir figure 3.13)

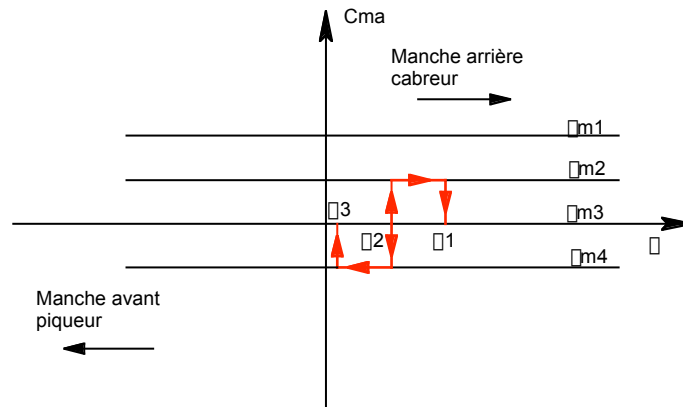


FIGURE 3.13 – Critère de stabilité en fonction de la position du manche, $\delta_{m1} < \delta_{m2} < \delta_{m3} < \delta_{m4}$ dans le cas d'un avion neutre.

3.6 Test en vol de la stabilité : cas du manche libre

Dans le cas d'un avion sans servo-commandes, la procédure à suivre en vol pour savoir si l'avion est stable ou pas est la suivante : l'avion vole à la vitesse V_0 avec une incidence α_0 et

un angle de gouverne de profondeur δ_{m0} . Le compensateur, installé sur la gouverne, est réglé de telle façon que le moment de charnière est nul :

$$C_{\text{charnière}} = C_c = a_0 + a_1\alpha_0 + a_2\delta_{m0} + a_3\delta_{t0} = 0 \quad (3.17)$$

V_0 et α_0 sont appelées respectivement vitesse et incidence de compensateur. δ_{t0} est l'angle de réglage du compensateur.

Comme dans le cas précédent, il faudrait tracer la courbe $M_A = f(\alpha)$ ou encore $C_{mA} = f(\alpha)$ pour différentes valeurs de C_c .

$$C_{mA} = C_{m0} + C_{m\alpha}\alpha + C_{m\delta}\delta_m \quad (3.18)$$

$$C_c = a_0 + a_1\alpha + a_2\delta_m + a_3\delta_{t0} \quad (3.19)$$

Il est possible d'introduire dans l'expression précédente les données relatives à l'équilibre α_0 et δ_{m0} .

$$C_{mA} = C_{m\alpha}(\alpha - \alpha_0) + C_{m\delta}(\delta_m - \delta_{m0}) \quad (3.20)$$

$$C_c = a_1(\alpha - \alpha_0) + a_2(\delta_m - \delta_{m0}) \quad (3.21)$$

Ceci peut encore s'écrire :

$$C_{mA} = \left(C_{m\alpha} - C_{m\delta} \frac{a_1}{a_2} \right) (\alpha - \alpha_0) + C_{m\delta} \frac{C_c}{a_2} \quad (3.22)$$

ou encore

$$C_{mA} = C'_{m\alpha}(\alpha - \alpha_0) + C_{m\delta} \frac{C_c}{a_2} \quad (3.23)$$

Une augmentation de braquage δ_m augmente la portance de l'empennage de profondeur. Un moment piqueur est donc créé d'où :

$$C_{m\delta} < 0. \quad (3.24)$$

Une augmentation de braquage par rapport à δ_{m0} doit conduire à un moment de charnière négatif qui tend à ramener la gouverne à sa position d'équilibre donc :

$$a_2 < 0. \quad (3.25)$$

Dans le cas contraire, on dit que la gouverne est surcompensée. Ce phénomène est très dangereux car la gouverne ne demande qu'à partir en butée.

Sous l'effet d'un moment de charnière positif, δ_m augmente et le manche a tendance à partir vers l'avant. Pour équilibrer un moment de charnière positif, le pilote doit donc appliquer un effort "à tirer" sur le manche.

Ces quelques remarques nous permettent de tracer deux graphes donnant l'évolution du moment aérodynamique en fonction du moment de charnière. Les figures 3.14 et 3.15 représentent respectivement le cas de l'avion stable et celui de l'avion instable. En vol, il suffit de tracer les efforts que doit fournir le pilote pour maintenir une incidence différente α_0 . En pratique, on trace l'évolution de la vitesse de vol en fonction des efforts fournis par le pilote pour tenir le manche. L'avion est stable si une augmentation de vitesse, donc une diminution de l'incidence, entraîne un effort "à pousser" de la part du pilote (voir figure 3.16).

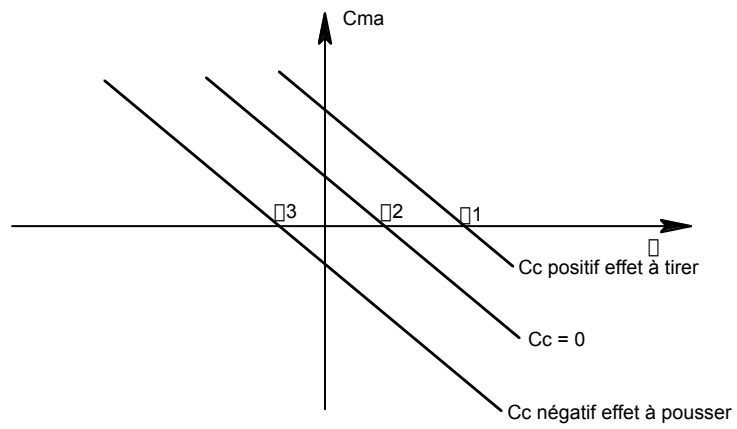


FIGURE 3.14 –

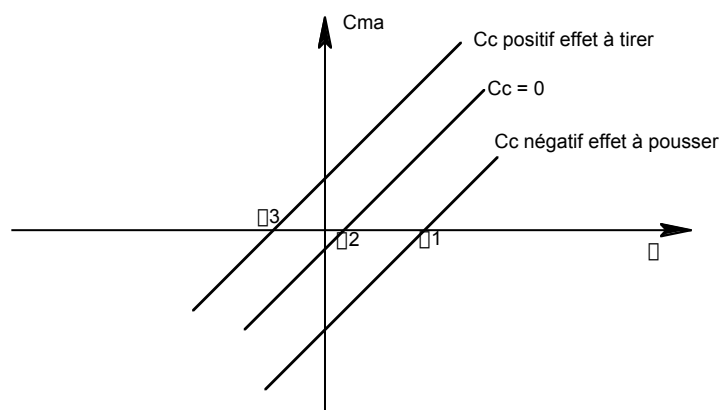


FIGURE 3.15 –

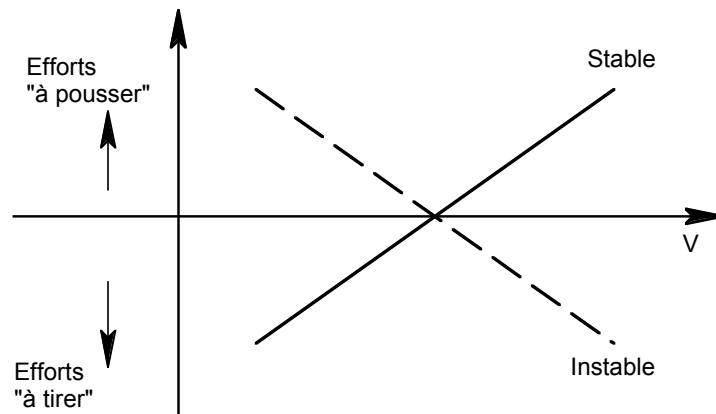


FIGURE 3.16 –

3.7 Cas du déplacement du foyer en vol

Tout ce qui a été développé dans ce chapitre est vrai à faible incidence et si l'avion ne franchit pas le mur du son.

- A grande incidence, les avions à forte flèche décrochent en bout d'aile, ce qui change la position du foyer (pitch up).
- Lors du passage en supersonique, la création d'ondes de choc déplace, elle aussi, la position du foyer.

Cela peut provoquer une déstabilisation de l'avion en cours de vol. Ce phénomène est représenté sur la figure 3.17. Pour une incidence inférieure à α_2 , l'avion est statiquement stable pour des incidences supérieures, il devient instable. Pour une incidence supérieure à α_3 , les gouvernes sont en butée et il n'y a plus moyen de récupérer l'avion.

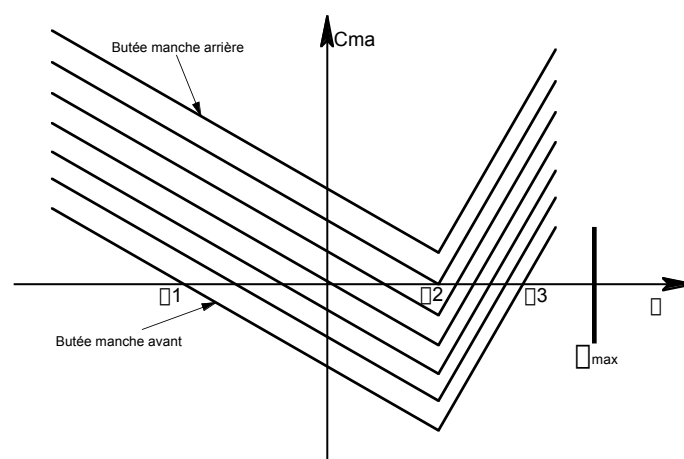


FIGURE 3.17 –

Remarque : lorsque le Concorde passe le mur du son, le foyer recule de quelques mètres. L'avion devient alors beaucoup trop stable statiquement. Une partie du carburant est alors transférée de l'avant de l'avion vers l'arrière pour reculer le centre de gravité et réduire la stabilité. Lors du retour en subsonique, le foyer avance de quelques mètres pour reprendre sa position initiale qui se trouve devant la position du centre de gravité utilisée en supersonique. Il est alors impératif de retransférer du carburant vers l'avant pour assurer un centrage avant et ainsi retrouver une stabilité statique de l'avion.

Chapitre 4

Equations du mouvement

4.1 Introduction

Le but de ce chapitre est de définir l'ensemble des équations qui régissent le mouvement de l'avion. Pour cela, nous allons introduire la notion d'angles d'Euler qui permet de définir des matrices de passage entre les repères terrestre et avion. Les équations du mouvement seront alors définies en ne tenant compte que des forces aérodynamiques et de la force de pesanteur. Puis une linéarisation de ces équations, permettant l'étude de la réponse aux petites perturbations, sera proposée.

4.2 Les angles d'Euler

Pour établir les équations du mouvement de l'avion, deux repères sont couramment utilisés : le repère terrestre (qui est considéré comme Galiléen) et le repère avion. Ces deux repères étant en mouvement permanent l'un par rapport à l'autre, il est important de disposer de matrices de passage qui permettent d'exprimer les différentes forces dans l'un ou l'autre des repères. Pour cela, en mécanique du vol, il est courant d'utiliser la transformation des angles d'Euler.

Cette transformation se décompose en trois rotations successives (cf Fig. 5.2) :

- la première rotation consiste à prendre un repère aligné sur le repère terrestre (O, x_0, y_0, z_0) et à lui faire subir une rotation autour de l'axe Oz_0 d'un angle Ψ , appelé *azimut*, ce qui donne un nouveau repère (O, x_1, y_1, z_1) avec $z_1 = z_0$,
- la deuxième rotation suivant l'axe Oy_1 d'un angle Θ , appelé *assiette* permet de passer du repère (O, x_1, y_1, z_1) au repère (O, x_2, y_2, z_2) ,
- pour finir une rotation suivant l'axe Ox_2 d'un angle Φ , appelé *angle de gîte* ou encore *de roulis*, permet de passer du repère (O, x_2, y_2, z_2) au repère avion (O, x, y, z)

La matrice de passage, S , entre le repère terrestre et le repère avion est obtenue comme le produit des matrices associées aux trois rotations définies précédemment.

$$S = \begin{bmatrix} (\cos \Psi \cos \Theta) & (\sin \Psi \cos \Theta) & (-\sin \Theta) \\ \begin{pmatrix} \cos \Psi \sin \Theta \sin \Phi \\ -\sin \Psi \cos \Theta \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \sin \Psi \sin \Theta \sin \Phi \\ +\cos \Psi \cos \Phi \end{pmatrix} & (\cos \Theta \sin \Phi) \\ \begin{pmatrix} \cos \Psi \sin \Theta \cos \Phi \\ +\sin \Psi \sin \Theta \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \sin \Psi \sin \Theta \cos \Phi \\ -\cos \Psi \sin \Phi \end{pmatrix} & (\cos \Theta \cos \Phi) \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

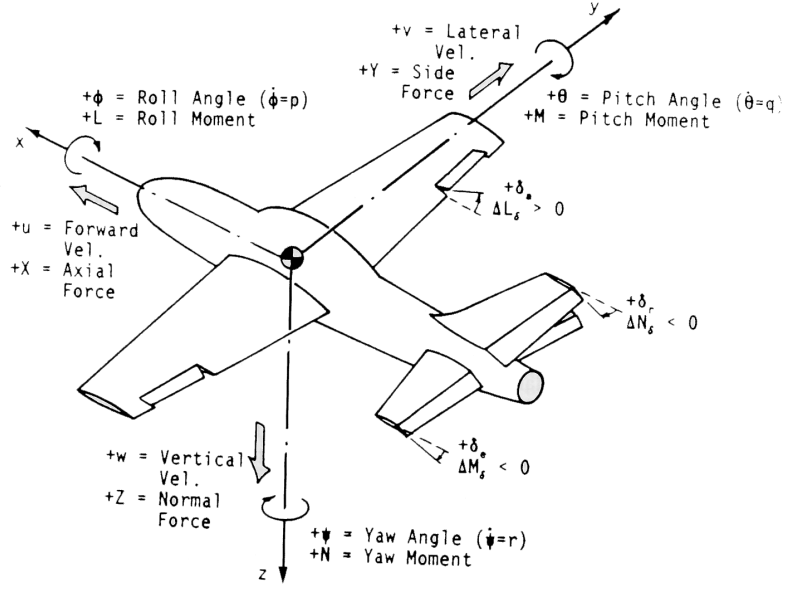


FIGURE 4.1 – Définition des trois angles d'Euler [tirée de ?]

Pour passer du repère avion au repère terrestre, il faut utiliser la matrice de passage inverse qui est dans notre cas aussi égale à la transposée de S :

$$S^{-1} = S^T = \begin{bmatrix} (\cos \Psi \cos \Theta) & \begin{pmatrix} \cos \Psi \sin \Theta \sin \Phi \\ -\sin \Psi \cos \Theta \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \cos \Psi \sin \Theta \cos \Phi \\ +\sin \Psi \sin \Theta \end{pmatrix} \\ (\sin \Psi \cos \Theta) & \begin{pmatrix} \sin \Psi \sin \Theta \sin \Phi \\ +\cos \Psi \cos \Phi \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \sin \Psi \sin \Theta \cos \Phi \\ -\cos \Psi \sin \Phi \end{pmatrix} \\ (-\sin \Theta) & (\cos \Theta \sin \Phi) & (\cos \Theta \cos \Phi) \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Pour illustrer l'utilisation de ces matrices de passage, nous allons présenter deux exemples. Le premier montre à partir des composantes de la vitesse de l'avion dans le repère avion comment les exprimer dans le repère terrestre :

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_0}{dt} \\ \frac{dy_0}{dt} \\ \frac{dz_0}{dt} \end{pmatrix} = S^T \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

Cette équation est utilisée dans les simulateurs de vol pour calculer la position de l'avion. Elle n'est cependant pas auto-suffisante. En effet, il faut aussi connaître l'évolution temporelle des angles d'Euler pour pouvoir déterminer complètement la position et l'attitude de l'avion au cours du temps.

Le deuxième exemple concerne l'expression du poids de l'avion. En effet, les forces de gravité sont extrêmement simples à exprimer dans le repère terrestre :

$$\mathbf{P}_{\text{terrestre}} = (0 \quad 0 \quad mg)^T \quad (4.4)$$

Pour l'exprimer dans le repère avion, il suffit d'appliquer la transformation d'Euler :

$$\mathbf{P}_{\text{avion}} = S \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{pmatrix} = (mg) \begin{pmatrix} -\sin \Theta \\ \cos \Theta \sin \Phi \\ \cos \Theta \cos \Phi \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

Le cas de la vitesse de rotation est légèrement différent. Le vecteur rotation est défini comme suit :

$$\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

avec

- p la vitesse de roulis, rotation autour de l'axe Ox , $p = d\phi/dt$,
- q la vitesse de tangage, rotation autour de l'axe Oy , $q = d\theta/dt$,
- r la vitesse de lacet, rotation autour de l'axe Oz , $r = d\psi/dt$

il peut aussi être défini à partir des angles d'Euler :

$$\mathbf{\Omega} = \Delta\mathbf{\Omega}_\Phi + \Delta\mathbf{\Omega}_\Theta + \Delta\mathbf{\Omega}_\Psi \quad (4.7)$$

Pour relier les vitesses de rotation mesurées dans l'avion (p, q, r) aux angles d'Euler, il suffit d'exprimer le vecteur rotation basé sur les angles d'Euler dans le repère avion. Nous avons donc :

$$\mathbf{\Omega} = T_\Phi \begin{pmatrix} \frac{d\Phi}{dt} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + T_\Phi T_\Theta \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{d\Theta}{dt} \\ 0 \end{pmatrix} + T_\Phi T_\Theta T_\Psi \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{d\Psi}{dt} \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

ce qui donne :

$$\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \Theta \\ 0 & \cos \Theta & \cos \Theta \sin \Phi \\ 0 & -\sin \Phi & \cos \Theta \cos \Phi \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d\Phi}{dt} \\ \frac{d\Theta}{dt} \\ \frac{d\Psi}{dt} \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

Nous pouvons aussi exprimer la variation des angles d'Euler en fonction des vitesses de rotation autour des axes de l'avion :

$$\begin{pmatrix} \frac{d\Phi}{dt} \\ \frac{d\Theta}{dt} \\ \frac{d\Psi}{dt} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \Phi \tan \Theta & \cos \Phi \tan \Theta \\ 0 & \cos \Phi & -\sin \Phi \\ 0 & \sin \Phi \tan^{-1} \Theta & \cos \Phi \tan^{-1} \Theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

4.3 Equations du mouvement

Les équations décrivant le mouvement de l'avion, dans le repère avion, sont obtenues en appliquant les règles classiques de la mécanique des solides :

$$F_x = m\dot{u} + m(qw - rv) \quad (4.11)$$

$$F_y = m\dot{v} + m(ru - pw) \quad (4.12)$$

$$F_z = m\dot{w} + m(pv - qu) \quad (4.13)$$

$$M_x = I_x \dot{p} - I_{xz} \dot{r} + qr(I_z - I_y) - pqI_{xz} \quad (4.14)$$

$$M_y = I_y \dot{q} + pr(I_x - I_z) + (p^2 - r^2)I_{xz} \quad (4.15)$$

$$M_z = I_z \dot{r} - I_{xz} \dot{p} + pq(I_y - I_x) + qrI_{xz} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= \cos \Theta \cos \Psi u + (\sin \Phi \sin \Theta \cos \Psi - \cos \Phi \sin \Psi)v \\ &\quad + (\cos \Phi \sin \Theta \cos \Psi + \sin \Phi \sin \Psi)w \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_0 &= \cos \Theta \sin \Psi u + (\sin \Phi \sin \Theta \sin \Psi - \cos \Phi \cos \Psi)v \\ &\quad + (\cos \Phi \sin \Theta \sin \Psi + \sin \Phi \cos \Psi)w \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\dot{z}_0 = -\sin \Theta u + \sin \Phi \cos \Theta v + \cos \Phi \cos \Theta w \quad (4.19)$$

$$\dot{\Phi} = p + \tan \Theta (q \sin \Phi + r \cos \Phi) \quad (4.20)$$

$$\dot{\Theta} = q \cos \Phi - r \sin \Phi \quad (4.21)$$

$$\dot{\Psi} = \tan^{-1} \Theta (q \sin \Phi + r \cos \Phi) \quad (4.22)$$

Ce jeu d'équations peut se simplifier si l'axe principal d'inertie est aligné avec le trièdre avion. Dans ce cas $I_{xz} = 0$. Mais malgré tout, les termes tels que $mq(t)w(t)$ et $mq(t)r(t)$ rendent ce système d'équations fortement couplé et non linéaire. Il est donc nécessaire de recourir à la simulation numérique pour le résoudre et connaître les évolutions de l'avion. Cependant, il est possible de comprendre et d'analyser un grand nombre de comportements de l'avion en simplifiant le système d'équations précédent à l'aide d'une linéarisation des équations basée sur une étude des petites perturbations autour d'un point de vol stable.

4.4 Les équations linéarisées

Pour pouvoir étudier les réactions de l'avion face à des perturbations, nous allons linéariser les équations 4.11 à 4.22. Le système obtenu sera valable pour l'étude des phases de vol stationnaires et permettra de quantifier l'impact, sur la dynamique de l'avion, de petites perturbations. Pour cette analyse, nous allons faire les deux hypothèses suivantes :

- L'avion est en vol horizontal stationnaire.
- A l'instant initial, le repère avion est aligné avec le vecteur vitesse. Ces axes peuvent donc être utilisés comme axes de stabilité.

Les forces s'exerçant sur l'avion sont la somme des forces aérodynamiques et de la force de pesanteur. Nous avons donc :

$$\begin{aligned} F_x &= T + X_0 + \Delta X(t) - mg \sin \Theta \\ F_y &= Y_0 + \Delta Y(t) + mg \cos \Theta \sin \Phi \\ F_z &= Z_0 + \Delta Z(t) + mg \cos \Theta \cos \Phi \end{aligned} \quad (4.23)$$

où l'indice 0 caractérise les forces appliquées sur l'avion lors du vol en phase stationnaire et les termes de la forme $\Delta X(t)$ représentent les perturbations dues aux évolutions de l'avion autour de son point d'équilibre.

Les moments s'exerçant sur l'avion s'écrivent sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} M_x &= L = L_0 + \Delta L(t) \\ M_y &= M = M_0 + \Delta M(t) \\ M_z &= N = N_0 + \Delta N(t) \end{aligned} \quad (4.24)$$

Pour pouvoir linéariser les équations, il faut, dans un premier temps, définir pour, chaque variable, sa valeur d'équilibre et la perturbation qui lui est associée :

$$\begin{aligned} u &= u_0 + \Delta u(t) \\ v &= v_0 + \Delta v(t) = v(t) \\ w &= w_0 + \Delta w(t) = w(t) \\ p &= p_0 + \Delta p(t) = p(t) \\ q &= q_0 + \Delta q(t) = q(t) \\ r &= r_0 + \Delta r(t) = r(t) \\ \Theta &= \Theta_0 + \Delta \Theta(t) \\ \Phi &= \Phi_0 + \Delta \Phi(t) = \Phi(t) \end{aligned} \quad (4.25)$$

De plus, nous pouvons ajouter à ce jeu d'équations, les équations décrivant le vol stationnaire de l'avion :

$$T + X_0 - mg \sin \Theta_0 = 0 \quad (4.26)$$

$$Y_0 = 0 \quad (\text{car } \Phi_0 = 0) \quad (4.27)$$

$$Z_0 + mg \cos \Theta_0 = 0 \quad (4.28)$$

$$L_0 = M_0 = N_0 = 0 \quad (4.29)$$

Dans les équations, il apparaît des termes en $\sin \Theta$, $\cos \Theta$, $\sin \Phi$ et $\cos \Phi$ qui peuvent être linéarisés comme suit si $\Delta \Theta(t) \ll 1$ et $\Phi(t) \ll 1$:

$$\begin{aligned} \sin \Theta &= \sin \Theta_0 + \Delta \Theta(t) \cos \Theta_0 \\ \cos \Theta &= \cos \Theta_0 - \Delta \Theta(t) \sin \Theta_0 \\ \sin \Phi &= \Phi(t) \quad \text{pour } \Phi_0 = 0 \\ \cos \Phi &= 1.0 \quad \text{pour } \Phi_0 = 0 \end{aligned} \quad (4.30)$$

Toutes les hypothèses étant maintenant posées, il est possible de linéariser l'ensemble des équations 4.11 à 4.22. A titre d'exemple, nous allons détailler la linéarisation de la première équation du système 4.11. Cette équation devient en utilisant l'ensemble des relations présentées précédemment :

$$\Delta X(t) - mg \Theta(t) \cos \Theta_0 = m[\Delta \dot{u}(t) + q(t)w(t) - r(t)v(t)] \quad (4.31)$$

Dans cette étape de linéarisation, nous n'allons conserver que les termes d'ordre 0 ou 1. L'équation 4.31 devient alors :

$$\Delta X(t) - mg \Theta(t) \cos \Theta_0 = m \Delta \dot{u}(t) = m V_0 (\Delta \dot{u}(t) / V_0) \quad (4.32)$$

Il est possible d'appliquer la même procédure pour les trois équations de conservation de la quantité de mouvement. Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned}\Delta X(t) - mg\Theta(t) \cos \Theta_0 &= m\Delta\dot{u}(t) = mV_0(\Delta\dot{u}(t)/V_0) \\ \Delta Y(t) + mg\Phi(t) \cos \Theta_0 &= m(\dot{v}(t) + r(t)V_0) = mV_0(\dot{\beta}(t) + r(t)) \\ \Delta Z(t) - mg\Theta(t) \sin \Theta_0 &= m(\dot{w}(t) - q(t)V_0) = mV_0(\dot{\alpha}(t) - q(t))\end{aligned}\quad (4.33)$$

avec :

- $\alpha(t)$ la perturbation de l'angle d'attaque, $\alpha(t) = w(t)/V_0$
- $\beta(t)$ la perturbation de l'angle de dérapage, $\beta(t) = v(t)/V_0$

Pour obtenir les équations linéarisées pour les moments de lacet, de tangage et de roulis, il suffit de prendre les équations 4.14 à 4.16 et d'imposer L_0 , M_0 et N_0 à zéro (l'avion étant initialement à l'équilibre) puis de supprimer tous les termes d'ordre 2. Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned}\Delta L(t) &= I_x\dot{p}(t) - I_{xz}\dot{r}(t) \\ \Delta M(t) &= I_y\dot{q}(t) \\ \Delta N(t) &= I_z\dot{r}(t) - I_{xz}\dot{p}(t)\end{aligned}\quad (4.34)$$

ce qui nous donne pour le système complet :

$$\Delta X(t) - mg\Delta\theta(t) \cos \Theta_0 = m\Delta\dot{u}(t) = mV_0(\Delta\dot{u}(t)/V_0) \quad (4.35)$$

$$\Delta Y(t) + mg\Delta\phi(t) \cos \Theta_0 = m(\dot{v}(t) + r(t)V_0) = mV_0(\dot{\beta}(t) + r(t)) \quad (4.36)$$

$$\Delta Z(t) - mg\Delta\theta(t) \sin \Theta_0 = m(\dot{w}(t) - q(t)V_0) = mV_0(\dot{\alpha}(t) - q(t)) \quad (4.37)$$

$$\Delta L(t) = I_x\dot{p}(t) - I_{xz}\dot{r}(t) \quad (4.38)$$

$$\Delta M(t) = I_y\dot{q}(t) \quad (4.39)$$

$$\Delta N(t) = I_z\dot{r}(t) - I_{xz}\dot{p}(t) \quad (4.40)$$

$$\dot{x}_0 = (u_0 + \Delta u(t)) \cos \Theta_0 - u_0\Delta\Theta(t) \sin \Theta_0 + w(t) \sin \Theta_0 \quad (4.41)$$

$$\dot{y}_0 = u_0\Psi \cos \Theta_0 + v(t) \quad (4.42)$$

$$\dot{z}_0 = -(u_0 + \Delta u(t)) \sin \Theta_0 - u_0\Delta\Theta(t) \cos \Theta_0 + w(t) \cos \Theta_0 \quad (4.43)$$

$$\Delta\dot{\Theta}(t) = q \quad (4.44)$$

$$\dot{\Phi}(t) = p(t) + r(t) \tan \Theta_0 \quad \text{ou encore} \quad p(t) = \dot{\Phi}(t) - \dot{\Psi}(t) \sin \Theta_0 \quad (4.45)$$

$$\dot{\Psi}(t) = r(t) \tan^{-1} \Theta_0 \quad (4.46)$$

L'ensemble des forces et moments aérodynamiques qui interviennent dans le système linéarisé seront développés en série Taylor. Ce développement fera l'objet du chapitre 5. Les variables, traditionnellement prises en compte, dans ces développements, sont les variables d'état suivantes :

$$\Delta X(t) = \Delta X[(u/V_0), \alpha, \dot{\alpha}, q, \delta, \beta, \dot{\beta}, p, r, \dots] \quad (4.47)$$

où δ représente l'action des commandes. Les dérivées des forces et moments aérodynamiques par rapport aux variables d'état (X_i) sont appelées *dérivées de stabilité dimensionnelles*.

Dans le cadre de ce cours, nous allons faire les hypothèses traditionnellement utilisées dans le monde de la mécanique du vol :

- Le vol est symétrique, les dérivées des forces et des couples latéraux par rapport aux variables longitudinales (u, w, q) sont nulles.
- Les dérivées des forces et des couples aérodynamiques longitudinaux par rapport aux variables latérales seront négligées.
- Les dérivées des forces et des couples aérodynamiques par rapport aux dérivées temporelles des variables d'état sont négligées, à l'exception de $Z_{\dot{w}}$ et $M_{\dot{w}}$.
- La dérivée X_q est négligée.
- Les variations de la masse volumique en fonction de l'altitude sont négligées.

4.5 Formulation matricielle

Le système d'équation éq. 4.35 à éq. 4.46 peut être décomposé en un système décrivant les mouvements longitudinaux et un système décrivant les mouvements latéraux. Cette décomposition ne peut être faite que dans le cas d'un avion standard. Les équations associées au mode longitudinal sont les équations décrivant la force axiale, $\Delta X(t)$, la force normale, $\Delta Z(t)$ et le moment de tangage, $\Delta M(t)$. Celles associées aux modes latéraux sont les équations décrivant la force latérale, $\Delta Y(t)$, et les moments de roulis, $\Delta L(t)$, et de lacet, $\Delta N(t)$.

4.5.1 Système longitudinal

Le développement de Taylor pour les grandeurs : $\Delta X(t)$, $\Delta Z(t)$ et $\Delta M(t)$ est fait suivant les variables suivantes :

$$\frac{u(t)}{V}, \quad \alpha(t) = \frac{w(t)}{V}, \quad \dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt}, \quad q = \frac{d\theta}{dt}, \quad \text{et} \quad \delta(t) \quad (4.48)$$

Le développement de la force aérodynamique axiale s'écrit comme suit :

$$\Delta X(t) = \Delta X_u[u(t)/V] + \Delta X_\alpha \alpha(t) + \Delta X_{\dot{\alpha}} \dot{\alpha} + \Delta X_q q(t) + \Delta X_\delta \delta(t) \quad (4.49)$$

avec :

- ΔX_u la variation de ΔX par unité de (u/V) : $\partial \Delta X / \partial (u/V)$ (N)
- ΔX_α la variation de ΔX par unité de α : $\partial \Delta X / \partial \alpha$ (N.rad⁻¹)
- $\Delta X_{\dot{\alpha}}$ la variation de ΔX par unité de $\dot{\alpha}$: $\partial \Delta X / \partial \dot{\alpha}$ (N.s.rad⁻¹)
- ΔX_q la variation de ΔX par unité de q : $\partial \Delta X / \partial q$ (N.s.rad⁻¹)
- ΔX_δ la variation de ΔX par unité de δ : $\partial \Delta X / \partial \delta$ (N.rad⁻¹)

Les termes $\Delta X_{\dot{\alpha}}$ et ΔX_q sont souvent négligés en raison de leur faible valeur comparée aux autres termes. Le terme ΔX_α est quant à lui très dépendant du coefficient de portance C_L .

Il est aussi possible d'écrire :

$$\Delta Z(t) = \Delta Z_u[u(t)/V] + \Delta Z_\alpha \alpha(t) + \Delta Z_{\dot{\alpha}} \dot{\alpha} + \Delta Z_q q(t) + \Delta Z_\delta \delta(t) \quad (4.50)$$

Dans cette expression, le terme ΔZ_α dépend fortement de la pente de la polaire. Les termes $\Delta Z_{\dot{\alpha}}$ et ΔZ_q sont parfois donnés pour certains avions. Cependant ils n'ont qu'une influence mineure sur la dynamique de l'avion.

De même, nous pouvons écrire :

$$\Delta M(t) = \Delta M_u[u(t)/V] + \Delta M_\alpha \alpha(t) + \Delta M_{\dot{\alpha}} \dot{\alpha} + \Delta M_q q(t) + \Delta M_\delta \delta(t) \quad (4.51)$$

avec ΔM_α qui dépend fortement de la position du centre de gravité par rapport au foyer. Le terme ΔM_q est dépendant des coefficients d'amortissement de tangage. Il joue un rôle prépondérant dans l'amortissement du mode propre naturel le plus rapide de l'avion (l'oscillation d'incidence).

Pour faciliter la suite de l'exposé, nous allons introduire de nouvelles définitions pour les dérivées dimensionnelles des forces et des moments. Pour les dérivées dépendantes de : $\alpha, \dot{\alpha}, q$ et δ , nous posons :

$$X_i = \Delta X_i / m \quad (4.52)$$

$$Z_i = \Delta Z_i / m \quad (4.53)$$

$$M_i = \Delta M_i / I_y \quad (4.54)$$

Pour les dérivées dépendantes de u , nous posons :

$$X_u = \Delta X_u / (mV) \quad (4.55)$$

$$Z_u = \Delta Z_u / (mV) \quad (4.56)$$

$$M_u = \Delta M_u / (I_y V) \quad (4.57)$$

Les équations 4.35, 4.37, 4.39 et 4.44 décrivant la partie longitudinale des mouvements de l'avion donne alors :

$$V(\Delta \dot{u}/V) = V X_u(\Delta u/V) + X_\alpha \alpha - g \Delta \Theta \cos \Theta_0 + X_\delta \delta \quad (4.58)$$

$$(V - Z_{\dot{\alpha}})\dot{\alpha} = V Z_u(\Delta u/V) + Z_\alpha \alpha + (V + Z_q)q - g \Delta \Theta \sin \Theta_0 + Z_\delta \delta \quad (4.59)$$

$$-M_{\dot{\alpha}}\dot{\alpha} + \dot{q} = V M_u(\Delta u/V) + M_\alpha \alpha + M_q q + M_\delta \delta \quad (4.60)$$

$$\Delta \dot{\Theta} = q \quad (4.61)$$

Nous définissons comme jeu de variables d'état du système longitudinal :

$$\{x\} = [\Delta u/V \quad \alpha \quad q \quad \Delta \Theta]^T \quad (4.62)$$

Le système longitudinal peut alors s'écrire :

$$[I_n]\{\dot{x}\} = [A_n]\{x\} + \{B_n\}\delta \quad (4.63)$$

avec

$$[I_n] = \begin{bmatrix} V & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (V - Z_{\dot{\alpha}}) & 0 & 0 \\ 0 & -M_{\dot{\alpha}} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.64)$$

$$[A_n] = \begin{bmatrix} V X_u & X_\alpha & 0 & -g \cos \Theta_0 \\ V Z_u & Z_\alpha & (V + Z_q) & -g \sin \Theta_0 \\ V M_u & M_\alpha & M_q & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.65)$$

et

$$\{B_n\} = [X_\delta \quad Z_\delta \quad M_\delta \quad 0]^T \quad (4.66)$$

La matrice $[I_n]$ n'étant pas singulière, il est possible de multiplier l'équation 4.63 par $[I_n]^{-1}$. Ce qui donne alors :

$$\{\dot{x}\} = [A]\{x\} + \{B\}\delta \quad (4.67)$$

avec :

- $[A]$ la matrice caractéristique de l'avion $[A] = [I_n]^{-1}[A_n]$
- $[B]$ la matrice caractéristique des commandes de l'avion $[B] = [I_n]^{-1}[B_n]$

Les coefficients de la matrice $[A]$ étant :

$$\begin{aligned} A_{11} &= X_u & A_{12} &= X_\alpha/V & A_{13} &= 0 & A_{14} &= -(g/V) \cos \Theta_0 \\ A_{21} &= VZ_u/(V - Z_{\dot{\alpha}}) & A_{22} &= Z_\alpha/(V - Z_{\dot{\alpha}}) \\ A_{23} &= (V + Z_q)/(V - Z_{\dot{\alpha}}) & A_{24} &= -g \sin \Theta_0/(V - Z_{\dot{\alpha}}) \\ A_{31} &= VM_u + M_{\dot{\alpha}}VZ_u/(V - Z_{\dot{\alpha}}) & A_{32} &= M_\alpha + M_{\dot{\alpha}}Z_\alpha/(V - Z_{\dot{\alpha}}) \\ A_{33} &= M_q + M_{\dot{\alpha}}(V + Z_q)/(V - Z_{\dot{\alpha}}) & A_{34} &= 0 \\ A_{41} &= A_{42} = A_{44} = 0 & A_{43} &= 1 \end{aligned}$$

et ceux de la matrice $[B]$:

$$\begin{aligned} B_1 &= X_\delta/V & B_2 &= Z_\delta/(V - Z_{\dot{\alpha}}) \\ B_3 &= M_\delta + M_{\dot{\alpha}}Z_\delta/(V - Z_{\dot{\alpha}}) & B_4 &= 0 \end{aligned}$$

4.5.2 Système transversal

Le développement de Taylor pour les grandeurs : $\Delta Y(t)$, $\Delta L(t)$ et $\Delta N(t)$ est dans ce cas fait selon les variables suivantes :

$$\beta(t) = \frac{v(t)}{V}, \quad p = \frac{d\phi}{dt}, \quad r = \frac{d\psi}{dt} \quad \text{et} \quad \delta(t) \quad (4.68)$$

contrairement au cas longitudinal où les dérivées suivant α et $\dot{\alpha}$ était considérée, dans le cas transversal, l'influence des dérivées suivant $\dot{\beta} = d\beta/dt$ est négligées. De même l'influence de l'angle de gîte, ϕ , sur les grandeurs aérodynamiques sera négligée.

La force aérodynamique latérale, peut donc s'écrire sous la forme suivante :

$$\Delta Y(t) = \Delta Y_\beta \beta(t) + \Delta Y_p p(t) + \Delta Y_r r(t) + \Delta Y_\delta \delta(t) \quad (4.69)$$

avec :

- ΔY_β la variation de ΔY par unité de β : $\partial \Delta Y / \partial \beta$ (N.rad⁻¹)
- ΔY_p la variation de ΔY par unité de p : $\partial \Delta Y / \partial p$ (N.s.rad⁻¹)
- ΔY_r la variation de ΔY par unité de r : $\partial \Delta Y / \partial r$ (N.s.rad⁻¹)
- ΔY_δ la variation de ΔY par unité de δ : $\partial \Delta Y / \partial \delta$ (N.rad⁻¹)

Le moment de roulis s'écrit sous la forme suivante :

$$\Delta L(t) = \Delta L_\beta \beta(t) + \Delta L_p p(t) + \Delta L_r r(t) + \Delta L_\delta \delta(t) \quad (4.70)$$

Le terme ΔL_β dépend directement de l'effet aérodynamique connu sous le nom d'effet dièdre. Quand au terme ΔL_p , il caractérise la capacité de l'avion à amortir le roulis.

De même, le moment de lacet, s'écrit :

$$\Delta N(t) = \Delta N_\beta \beta(t) + \Delta N_p p(t) + \Delta N_r r(t) + \Delta N_\delta \delta(t) \quad (4.71)$$

Le terme ΔN_β caractérise la stabilité de route de l'avion, ΔN_r caractérisant lui l'amortissement en lacet.

Comme dans le cas du système longitudinal, les dérivées dimensionnées latérales sont reformulées comme suit pour simplifier la suite de la présentation :

$$Y_i = \Delta Y_i / m \quad (4.72)$$

$$L_i = \Delta L_i / I_x \quad (4.73)$$

$$N_i = \Delta N_i / I_z \quad (4.74)$$

avec $i = \beta, p, r, \delta$. Les équations ?? deviennent alors :

$$V\dot{\beta} = Y_\beta \beta + Y_p p + g\Phi \cos \Theta_0 + (Y_r - V)r + Y_\delta \delta \quad (4.75)$$

$$\dot{p} - (I_{xz}/I_x)\dot{r} = L_\beta \beta + L_p p + L_r r + L_\delta \delta \quad (4.76)$$

$$-(I_{xz}/I_z)\dot{p} + \dot{r} = N_\beta \beta + N_p p + N_r r + N_\delta \delta \quad (4.77)$$

$$\dot{\Phi} = p + r \tan \Theta_0 \quad (4.78)$$

Les variables d'état caractérisant les mouvements transversaux sont :

$$\{x\} = [\beta \quad p \quad \Phi \quad r]^T \quad (4.79)$$

Le système transversal peut alors s'écrire :

$$[I_n]\{\dot{x}\} = [A_n]\{x\} + \{B_n\}\delta \quad (4.80)$$

avec

$$[I_n] = \begin{bmatrix} V & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -I_{xz}/I_x \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -I_{xz}/I_z & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.81)$$

$$[A_n] = \begin{bmatrix} Y_\beta/V & Y_p/V & g \cos \Theta_0/V & (Y_r - V)/V \\ L_\beta & L_p & 0 & L_r \\ 0 & 1 & 0 & \tan \Theta_0 \\ N_\beta & N_p & 0 & N_r \end{bmatrix} \quad (4.82)$$

et

$$\{B_n\} = [Y_\delta \quad L_\delta \quad 0 \quad N_\delta]^T \quad (4.83)$$

La matrice $[I_n]$ n'étant pas singulière, il est possible de multiplier l'équation 4.80 par $[I_n]^{-1}$. Ce qui donne alors :

$$\{\dot{x}\} = [A]\{x\} + \{B\}\delta \quad (4.84)$$

avec :

— $[A]$ la matrice caractéristique de l'avion $[A] = I_n^{-1}[A_n]$

— $[B]$ la matrice caractéristique des commandes de l'avion $[B] = [I_n]^{-1}[B_n]$

Les coefficients de la matrice $[A]$ étant :

$$A_{11} = Y_\beta/V \quad A_{12} = Y_p/V \quad A_{13} = (g/V) \cos \Theta_0 \quad A_{14} = (Y_r - V)/V \quad (4.85)$$

$$A_{21} = L'_\beta = G[L_\beta + N_\beta I_{xz}/I_x] \quad A_{22} = L'_p = G[L_p + N_p I_{xz}/I_x] \quad (4.86)$$

$$A_{23} = 0 \quad A_{24} = L'_r = G[L_r + N_r I_{xz}/I_x] \quad (4.87)$$

$$A_{31} = 0 \quad A_{32} = 1 \quad A_{33} = 0 \quad A_{34} = \tan \Theta_0 \quad (4.88)$$

$$A_{41} = N'_\beta = G[N_\beta + L_\beta (I_{xz}/I_z)] \quad A_{42} = N'_p = G[N_p + L_p (I_{xz}/I_z)] \quad (4.89)$$

$$A_{43} = 0 \quad A_{44} = N'_r = G[N_r + L_r (I_{xz}/I_z)] \quad (4.90)$$

$$(4.91)$$

et ceux de la matrice $[B]$:

$$B_1 = Y_\delta/V \quad B_2 = L'_\delta = G[L_\delta + N_\delta (I_{xz}/I_z)] \quad (4.92)$$

$$B_3 = 0 \quad B_4 = N'_\delta = G[N_\delta + L_\delta (I_{xz}/I_z)] \quad (4.93)$$

avec

$$G = 1/[1 - (I_{xz})^2/(I_x I_z)] \quad (4.94)$$

4.6 Liens avec les coefficients aérodynamiques adimensionnés

L'ensemble des équations présentées dans ce chapitre sont sous forme dimensionnelle. Cette présentation a l'avantage de pouvoir être intégrée, très facilement, dans les simulateurs numériques. De plus, de nombreux ouvrages, les dérivées de stabilité dimensionnées sont répertoriées pour un grand nombre d'avions. Cependant, ces dérivées de stabilité dimensionnées sont assez difficiles à interpréter physiquement. C'est pourquoi, il est parfois utile de les exprimer en fonction des dérivées aérodynamiques adimensionnelles qui sont traditionnellement mesurées en souffleries. La méthode, pour faire le lien entre ces différents coefficients, est illustrée, dans cette section, pour la dérivée aérodynamique Z_α . De plus amples détails seront donnés dans le chapitre suivant.

$$Z_\alpha = \frac{1}{2} \rho S V^2 \frac{\partial C_z}{\partial \alpha} \quad (4.95)$$

Pour pouvoir l'exprimer en fonction des dérivées aérodynamiques adimensionnelle, il faut exprimer le coefficient C_z en fonction du coefficient de portance C_L et du coefficient de frottement C_D .

$$C_z = -C_D \sin \alpha - C_L \cos \alpha \quad (4.96)$$

Nous avons alors :

$$\frac{\partial C_z}{\partial \alpha} = -\frac{\partial C_D}{\partial \alpha} \sin \alpha - C_D \cos \alpha - \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \cos \alpha + C_L \sin \alpha \quad (4.97)$$

Ce qui peut se linéariser quand α est petit en :

$$\frac{\partial C_z}{\partial \alpha} = -C_D - \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \quad (4.98)$$

Ce qui finalement donne :

$$Z_{\alpha} = -\frac{1}{2}\rho S V^2 \left[C_D + \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \right] \quad (4.99)$$

Cette procédure peut être réitérée pour l'ensemble des forces et des moments. L'ensemble des résultats se trouve dans les tableaux 4.1 et 4.2.

Dérivée	Définition	Unité
X_u	$-\frac{QS}{mV} \left(2C_D + M \frac{\partial C_D}{\partial M} \right)$	s^{-1}
X_α	$\frac{QS}{m} \left(C_L - \frac{\partial C_D}{\partial \alpha} \right)$	$m.s^{-2}$
$X_{\dot{\alpha}}$	$-\frac{QS}{m} \left(\frac{c}{2V} \right) \frac{\partial C_D}{\partial (\dot{\alpha}c/2V)}$	$m.s^{-1}$
X_q	$-\frac{QS}{m} \left(\frac{c}{2V} \right) \frac{\partial C_D}{\partial (qc/2V)}$	$m.s^{-1}$
X_δ	$-\frac{QS}{m} \frac{\partial C_D}{\partial \delta}$	$m.s^{-2}$
Z_u	$-\frac{QS}{mV} \left(2C_L + M \frac{\partial C_L}{\partial M} \right)$	s^{-1}
Z_α	$-\frac{QS}{m} \left(C_D + \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \right)$	$m.s^{-2}$
$Z_{\dot{\alpha}}$	$-\frac{QS}{m} \left(\frac{c}{2V} \right) \frac{\partial C_L}{\partial (\dot{\alpha}c/2V)}$	$m.s^{-1}$
Z_q	$-\frac{QS}{m} \left(\frac{c}{2V} \right) \frac{\partial C_L}{\partial (qc/2V)}$	$m.s^{-1}$
Z_δ	$-\frac{QS}{m} \frac{\partial C_L}{\partial \delta}$	$m.s^{-2}$
M_u	$\frac{QSc}{I_y V} M \frac{\partial \delta}{\partial M}$	$m^{-1}.s^{-1}$
M_α	$\frac{QSc}{I_y} \frac{\partial C_m}{\partial \alpha}$	s^{-2}
$M_{\dot{\alpha}}$	$\frac{QSc}{I_y} \left(\frac{c}{2V} \right) \frac{\partial C_m}{\partial (\dot{\alpha}c/2V)}$	s^{-1}
M_q	$\frac{QSc}{I_y} \left(\frac{c}{2V} \right) \frac{\partial C_m}{\partial (qc/2V)}$	$m.s^{-1}$
M_δ	$\frac{QSc}{I_y} \frac{\partial C_m}{\partial \delta}$	$m.s^{-2}$

TABLE 4.1 – Dérivées de stabilité dimensionnelles longitudinales avec ($Q = 1/2\rho SV^2$)

Dérivée	Définition	Unité
Y_β	$\frac{QS}{m} \frac{\partial C_y}{\partial \beta}$	$m.s^{-1}$
Y_p	$\frac{QS}{m} \left(\frac{b}{2V} \right) \frac{\partial C_y}{\partial (rb/2V)}$	$m.s^{-1}$
Y_r	$\frac{QS}{m} \left(\frac{b}{2V} \right) \frac{\partial C_y}{\partial (rb/2V)}$	$m.s^{-1}$
Y_δ	$\frac{QS}{m} \frac{\partial C_y}{\partial \delta}$	$m.s^{-2}$
L_β	$\frac{Q Sb}{I_x} \frac{\partial C_l}{\partial \beta}$	s^{-2}
L_p	$\frac{Q Sb}{I_x} \left(\frac{b}{2V} \right) \frac{\partial C_l}{\partial (pb/2V)}$	s^{-1}
L_r	$\frac{Q Sb}{I_x} \left(\frac{b}{2V} \right) \frac{\partial C_l}{\partial (rb/2V)}$	s^{-1}
L_δ	$\frac{Q Sb}{I_x} \frac{\partial C_l}{\partial \delta}$	s^{-2}
N_β	$\frac{Q Sb}{I_z} \frac{\partial C_n}{\partial \beta}$	s^{-2}
N_p	$\frac{Q Sb}{I_z} \left(\frac{b}{2V} \right) \frac{\partial C_n}{\partial (pb/2V)}$	s^{-1}
N_r	$\frac{Q Sb}{I_z} \left(\frac{b}{2V} \right) \frac{\partial C_n}{\partial (rb/2V)}$	s^{-1}
N_δ	$\frac{Q Sb}{I_y} \frac{\partial C_n}{\partial \delta}$	s^{-2}

TABLE 4.2 – Dérivées de stabilité dimensionnelles transversales avec ($Q = 1/2\rho SV^2$)

Equations linéarisées de l'avion

Système longitudinal :

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{u}/V \\ \dot{\alpha} \\ \dot{q} \\ \Delta \dot{\Theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{X_u}{VZ_u} \\ \frac{V - Z_{\dot{\alpha}}}{VM_u + \frac{M_{\dot{\alpha}}VZ_u}{(V - Z_{\dot{\alpha}})}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ V + Z_q \\ \frac{V - Z_{\dot{\alpha}}}{M_{\dot{\alpha}}(V + Z_q)} \\ M_q + \frac{M_{\dot{\alpha}}}{(V - Z_{\dot{\alpha}})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{g \cos \Theta_0}{V} \\ \frac{g \sin \Theta_0}{V - Z_{\dot{\alpha}}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{X_{\delta}}{VZ_{\delta}} \\ \frac{\Delta u/V}{\alpha} \\ \frac{q}{q} \\ \Delta \Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{X_{\delta}}{VZ_{\delta}} \\ M_{\delta} + \frac{M_{\dot{\alpha}}Z_{\delta}}{(V - Z_{\dot{\alpha}})} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \delta \quad (4.100)$$

$$\dot{x}_0 = (u_0 + \Delta u) \cos \Theta_0 - u_0 \Delta \Theta \sin \Theta_0 + V \alpha \sin \Theta_0 \quad (4.101)$$

$$\dot{z}_0 = -(u_0 + \Delta u(t)) \sin \Theta_0 - u_0 \Delta \Theta \cos \Theta_0 + V \alpha \cos \Theta_0 \quad (4.102)$$

Système transversal :

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{p} \\ \dot{\Phi} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Y_{\beta}}{V} \\ G \left[L_{\beta} + N_{\beta} \frac{I_{xz}}{I_x} \right] \\ 0 \\ G \left[N_{\beta} + L_{\beta} \frac{I_{xz}}{I_z} \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{Y_p}{V} \\ G \left[L_p + N_p \frac{I_{xz}}{I_x} \right] \\ 1 \\ G \left[N_p + L_p \frac{I_{xz}}{I_z} \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{g \cos \Theta_0}{V} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{Y_r - V}{V} \\ G \left[L_r + N_r \frac{I_{xz}}{I_x} \right] \\ \tan \Theta_0 \\ G \left[N_r + L_r \frac{I_{xz}}{I_z} \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ p \\ \Phi \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{Y_{\delta}}{V} \\ G \left[L_{\delta} + N_{\delta} \frac{I_{xz}}{I_x} \right] \\ 0 \\ G \left[N_{\delta} + L_{\delta} \frac{I_{xz}}{I_z} \right] \end{bmatrix} \delta \quad (4.103)$$

$$\dot{y}_0 = u_0 \Psi \cos \Theta_0 + v \quad (4.104)$$

$$\dot{\Psi} = r \tan^{-1} \Theta_0 \quad (4.105)$$

$$G = 1/[1 - (I_{xz})^2/(I_x I_z)] \quad (4.106)$$

Chapitre 5

Dérivées de stabilité

Dans le chapitre 4, nous avons exprimé les différentes forces et moments aérodynamiques en fonction de dérivées de stabilité dimensionnées. Ces grandeurs sont particulièrement pratiques pour réaliser des simulations numériques avec des logiciels comme Matlab ou Simulink. Cependant, en utilisant des dérivées dimensionnées, il est difficile de comparer différents avions. Les aérodynamiciens ont donc plus l'habitude de mesurer et de calculer des dérivées aérodynamiques adimensionnées. Dans ce chapitre, nous allons faire le lien entre ces deux types de dérivées.

Nous traiterons dans un premier temps les dérivées de stabilité longitudinales, puis les dérivées de stabilité latérales.

5.1 Dérivées de stabilité longitudinales

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 4, les grandeurs aérodynamiques dépendent des quatre variables d'état : $\Delta u/V$ que nous noterons, par souci d'allègement : u/V , α , $\dot{\alpha}$ et q . De plus, ces grandeurs dépendent des perturbations imposées par le pilote que nous noterons δ .

5.1.1 Dérivées par rapport à u/V

Les équations 4.55 à 4.57 nous donnent :

$$X_u = \frac{S}{mV} \frac{\partial(QC_x)}{\partial(u/V)} \quad (5.1)$$

$$Z_u = \frac{S}{mV} \frac{\partial(QC_z)}{\partial(u/V)} \quad (5.2)$$

$$M_u = \frac{Sc}{I_y V} \frac{\partial(QC_m)}{\partial(u/V)} \quad (5.3)$$

avec

- S , la surface de référence,
- c , la corde de référence,
- m , la masse de l'avion,
- I_y , le moment d'inertie autour de l'axe Oy ,
- u , la perturbation de vitesse axiale, $u = \Delta u$,
- V , la vitesse de l'avion,
- Q , la pression dynamique, $Q = 1/2\rho V^2$,

- C_x , le coefficient adimensionné représentant les forces suivant l'axe Ox ,
- C_z , le coefficient adimensionné représentant les forces suivant l'axe Oz ,
- C_m , le coefficient adimensionné représentant les moments autour de l'axe Oy ,

La pression dynamique dépend de u/V , il est possible de l'exprimer comme suit :

$$Q = 0.5\rho S V^2 \left[1 + \left(\frac{u}{V} \right) \right]^2 = Q_0 \left(1 + 2 \left(\frac{u}{V} \right) + \left(\frac{u}{V} \right)^2 \right) \quad (5.4)$$

Une fois linéarisé, nous obtenons :

$$Q = Q_0 \left(1 + 2 \left(\frac{u}{V} \right) \right) \quad (5.5)$$

Dans le cas de l'approximation du premier ordre, nous pouvons poser :

$$C_x = -C_D \quad (5.6)$$

avec C_D le coefficient de traînée. Le coefficient X_u peut alors s'écrire :

$$X_u = -\frac{Q_0 S}{mV} \left[2C_D + \frac{\partial C_D}{\partial(u/V)} \right] \quad (5.7)$$

Le deuxième terme de cette équation représente l'influence de la vitesse sur le coefficient de traînée. Normalement, si on ne tient pas compte de la compressibilité, ce terme est nul. Cependant, ces effets de compressibilité ne peuvent être négligés. Ils sont représentés par le nombre de Mach, M . Le deuxième terme devient alors, avec a la vitesse du son :

$$\frac{\partial C_D}{\partial(u/V)} = V \frac{\partial C_D}{\partial M} \frac{\partial M}{\partial u} = V \frac{\partial C_D}{\partial M} \frac{\partial(V+u)/a}{\partial u} = M \frac{\partial C_D}{\partial M} \quad (5.8)$$

L'évolution de $\partial C_D / \partial M$ en fonction du Mach de vol est donnée sur la figure 5.1. Le Mach de vol associé à la valeur $\partial C_D / \partial M = 0.1$ est appelé Mach de vol critique, M_{cr} .

X_u s'écrit donc sous la forme suivante :

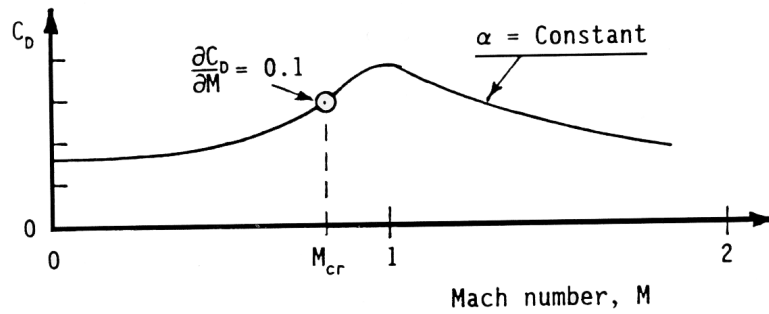
$$X_u = -\frac{QS}{mV} \left[2C_D + M \frac{\partial C_D}{\partial M} \right] \quad (5.9)$$

A partir de la figure 5.1 et de la formule 5.9 nous pouvons constater que le terme en C_D sera prépondérant pour le calcul de X_u pour des Mach de vol assez faibles. Alors que les effets de compressibilité deviendront non négligeables lors d'une phase de vol transonique. De plus, il faut noter que nous n'avons pas tenu compte des variations de la force propulsive fournie par le moteur en fonction des variations de vitesse. Cette hypothèse est tout à fait raisonnable quand l'avion est équipé d'un groupe turboréacteur.

De la même façon que pour déterminer X_u , nous pouvons calculer Z_u en supposant que $C_z = -C_L$.

$$Z_u = -\frac{QS}{mV} \left[2C_L + M \frac{\partial C_L}{\partial M} \right] \quad (5.10)$$

De même nous obtenons pour M_u :

FIGURE 5.1 – Evolution du coefficient C_{D_M} en fonction du Mach de vol [tirée de ?]

$$M_u = \frac{QS}{I_y V} M \frac{\partial C_m}{\partial M} \quad (5.11)$$

Dans cette expression, il n'existe pas de terme en C_m car nous supposons qu'à l'instant initial, l'avion est parfaitement réglé pour voler en vol stationnaire. Le coefficient de moment est donc nul.

5.1.2 Dérivées par rapport à α

Les équations 4.52 à 4.54, nous donnent :

$$X_\alpha = \Delta X_\alpha / m \quad (5.12)$$

$$Z_\alpha = \Delta Z_\alpha / m \quad (5.13)$$

$$M_\alpha = \Delta M_\alpha / I_y \quad (5.14)$$

Nous considérons que dans sa phase stationnaire, l'avion vole avec une incidence α_T et que le vecteur vitesse est aligné avec l'axe Ox . L'incidence est donc : $\alpha = \alpha_T + \Delta\alpha$. Dans ce cas, il est possible de relier les coefficients C_x et C_z aux coefficients de portance et de traînée, C_L et C_D .

$$\begin{pmatrix} C_x \\ C_z \end{pmatrix} = - \begin{bmatrix} \cos \Delta\alpha & -\sin \Delta\alpha \\ \sin \Delta\alpha & \cos \Delta\alpha \end{bmatrix} \begin{pmatrix} C_D \\ C_L \end{pmatrix} \quad (5.15)$$

ce qui donne pour C_x :

$$C_x = -C_D \cos \Delta\alpha + C_L \sin \Delta\alpha \quad (5.16)$$

La dérivée de C_x par rapport à $\Delta\alpha$ est alors :

$$\frac{\partial C_x}{\partial \alpha} = C_D \sin \Delta\alpha - \left(\frac{\partial C_D}{\partial \alpha} \right) \cos \Delta\alpha + C_L \cos \Delta\alpha + \left(\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \right) \sin \Delta\alpha \quad (5.17)$$

ou encore

$$\frac{\partial C_x}{\partial \alpha} = \left[C_D + \left(\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \right) \right] \Delta\alpha + \left[C_L - \left(\frac{\partial C_D}{\partial \alpha} \right) \right] \quad (5.18)$$

Il est possible de simplifier cette expression en supprimant le terme en $\Delta\alpha$ qui est d'un ordre de grandeur inférieur à l'autre.

$$\frac{\partial C_x}{\partial \alpha} = \left[C_L - \left(\frac{\partial C_D}{\partial \alpha} \right) \right] \quad (5.19)$$

ce qui donne pour X_α :

$$X_\alpha = \frac{QS}{m} \left[C_L - \left(\frac{\partial C_D}{\partial \alpha} \right) \right] \quad (5.20)$$

Pour C_z , nous obtenons de façon similaire :

$$C_z = -C_D \sin \Delta\alpha + C_L \cos \Delta\alpha \quad (5.21)$$

ce qui donne :

$$Z_\alpha = \frac{QS}{m} \left[C_D - \left(\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \right) \right] \quad (5.22)$$

Le coefficient de portance C_L , qui apparaît dans l'équation 5.20, est dû principalement à aux effets de l'aile et de la partie horizontale de l'empennage arrière. La contribution est en effet négligeable dans le cas des avions classiques. Il est possible de donner formule simplifiée de ce coefficient :

$$C_L = \left(\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \right)_{aile} (\alpha - \alpha_0) \quad (5.23)$$

$$+ \left(\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \right)_H [(1 - \epsilon_\alpha)(\alpha - \alpha_0) - \epsilon_0 + \delta_H] \left(\frac{S_H}{S} \right) \eta_H \quad (5.24)$$

avec :

- $(\partial C_L / \partial \alpha)_{aile}$: la pente de la courbe de portance de l'aile en fonction de l'incidence,
- $(\partial C_L / \partial \alpha)_H$: la pente de la courbe de portance de l'empennage arrière en fonction de l'incidence calculée à partir de la surface de l'empennage arrière, S_H ,
- α : l'angle d'attaque,
- ϵ_0 : angle qui caractérise la déviation de l'air au niveau de l'empennage arrière dû à la présence de l'aile dans l'écoulement,
- ϵ_α : variation de ϵ en fonction de α : $\partial \epsilon / \partial \alpha$,
- δ_H : angle de calage de l'aile,
- η_H : ratio entre la pression dynamique au niveau de l'aile Q_H et la pression dynamique au loin Q : Q_H / Q .

Le terme qui domine l'équation 5.22 est la pente de la courbe du coefficient de portance de l'avion complet en fonction de l'incidence. Nous pouvons l'obtenir à partir de l'expression suivante :

$$\left(\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \right)_{ac} = \left(\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \right)_{aile} + \left(\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \right)_H (1 - \epsilon_\alpha) \left(\frac{S_H}{S} \right) \eta_H \quad (5.25)$$

Les termes de cette équation doivent être corrigés séparément pour tenir compte de l'élasticité qui entraîne des déformations importantes de l'avion. Ce phénomène est particulièrement important dans le cas de avions modernes.

Quand on dérive la dérivée dimensionnée M_α , on trouve qu'elle dépend directement de :

$$\frac{\partial C_m}{\partial \alpha} = \left(\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \right)_{ac} \left[\left(\frac{x}{c} \right)_{\text{foyer}} - \left(\frac{x}{c} \right)_{\text{cdg}} \right] \left(\frac{\partial C_m}{\partial \alpha} \right)_{ac} \left(\frac{\Delta x}{c} \right)_{\text{foyer}} \quad (5.26)$$

avec comme système de coordonnées le repère avion. Il est aussi possible d'exprimer C_{m_q} pour faire apparaître l'influence de l'aile et celle de l'empennage arrière. On obtient alors :

$$\frac{\partial C_m}{\partial \alpha} = \left(\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \right)_{\text{aile}} \left(\frac{\Delta x}{c} \right)_{\text{avion}} - \left(\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \right)_H (1 - \epsilon_\alpha) V_H \eta_H \quad (5.27)$$

avec

- $(\Delta/c)_{\text{avion}}$ la position du centre de portance aérodynamique par rapport au centre de gravité de l'avion et normalisée par rapport à la corde de l'aile.
- V_H le coefficient de volume de l'empennage arrière : $V_H = (S_H l_H / Sc)$.
- l_H la distance entre le point d'application de la portance de l'empennage arrière et l'aile principale. l_H est positif si l'empennage se situe derrière la profil d'aile principal.

5.1.3 Dérivées par rapport à q

La vitesse de rotation autour de l'axe Oy induit une force et un moment sur l'avion. L'effet principal est sur le moment de tangage où q induit un moment opposé à la vitesse de tangage. La vitesse de rotation induit aussi une force normale à l'avion, mais n'a quasiment aucun impact sur la composante axiale des forces exercées sur l'avion, ce qui explique que le coefficient Z_q n'est pas répertorié dans les tables. Les dérivées dimensionnelles sont :

$$X_q = -\frac{QS}{m} \left(\frac{c}{2V} \right) C_{D_q} = 0 \quad (5.28)$$

$$Z_q = -\frac{QS}{m} \left(\frac{c}{2V} \right) C_{L_q} \quad (5.29)$$

$$M_q = -\frac{QSc}{I_y} \left(\frac{c}{2V} \right) C_{m_q} \quad (5.30)$$

Par convention, les dérivées adimensionnées sont définies comme suit :

$$C_{D_q} = \frac{\partial C_D}{\partial (qc/2V)} \quad (5.31)$$

$$C_{L_q} = \frac{\partial C_L}{\partial (qc/2V)} \quad (5.32)$$

$$C_{m_q} = \frac{\partial C_m}{\partial (qc/2V)} \quad (5.33)$$

$$(5.34)$$

ces expressions font intervenir la vitesse de tangage adimensionnée, $\hat{q} = (qc/2V)$.

Pour interpréter ces dérivées par rapport à la vitesse tangage, il est raisonnable de faire l'hypothèse que lorsque l'avion subit un mouvement de tangage, il se comporte comme s'il subissait un mouvement de rotation vertical (voir figure ??). L'aile principale ainsi que la partie horizontale de l'empennage arrière subissent donc des perturbations de vitesse ce qui va entraîner

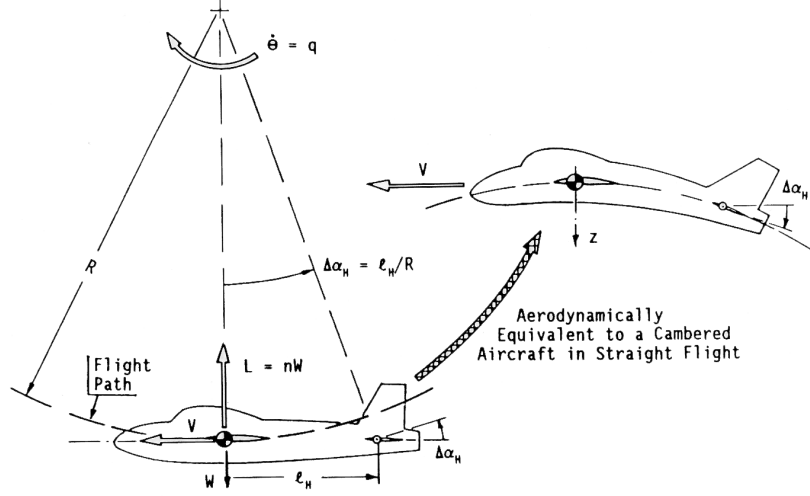


FIGURE 5.2 – Avion subissant un mouvement de tangage pur [tirée de ?]

des perturbations des forces et des moments aérodynamiques. Dans la pratique, la contribution de l'aile par rapport à celle de l'empennage arrière est négligeable.

Il est possible de relier la vitesse de vol de l'avion à la vitesse de tangage :

$$V = qR \quad (5.35)$$

avec R le rayon de giration de l'avion. La variation d'incidence de l'empennage arrière est alors :

$$\Delta\alpha_H = l_H/R = l_H q/R \quad (5.36)$$

Le rayon de giration peut être facilement estimer à partir du facteur de charge que subit l'avion :

$$R = \frac{V^2}{(n-1)g} \quad (5.37)$$

La variation du coefficient de portance est obtenue à partir de la formule suivante :

$$\Delta C_L = \left(\frac{S_H}{S} \right) \left(\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \right)_H \left(\frac{l_H q}{V} \right) \quad (5.38)$$

ou encore

$$\Delta C_L = 2V_H \left(\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \right)_H \left(\frac{qc}{2V} \right) \quad (5.39)$$

Il est alors possible calculer la contribution de l'aile au coefficient C_{L_q} :

$$(\Delta C_{L_q})_H = 2V_H \left(\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \right)_H \quad (5.40)$$

de même on obtient :

$$(\Delta C_{m_q})_H = 2V_H \left(\frac{l_H}{c} \right) \left(\frac{\partial C_L}{\alpha} \right)_H \quad (5.41)$$

Pour tenir compte de la contribution de l'aile, il est fréquent de considérer qu'elle représente 10% de la contribution de l'empennage arrière. Nous obtenons alors pour l'avion complet :

$$\Delta C_{L_q} = 2.2V_H \left(\frac{\partial C_L}{\alpha} \right)_H \quad (5.42)$$

$$\Delta C_{m_q} = 2.2V_H \left(\frac{l_H}{c} \right) \left(\frac{\partial C_L}{\alpha} \right)_H \quad (5.43)$$

5.1.4 Dérivées par rapport à $\dot{\alpha}$

Les variations d'incidence produisent une force normale ainsi qu'un moment de rappel. Les dérivées aérodynamiques dimensionnées s'écrivent sous la forme suivante :

$$X_{\dot{\alpha}} = -\frac{QS}{m} \left(\frac{c}{2V} \right) C_{D_{\dot{\alpha}}} = 0 \quad (5.44)$$

$$Z_{\dot{\alpha}} = -\frac{QS}{m} \left(\frac{c}{2V} \right) C_{L_{\dot{\alpha}}} \quad (5.45)$$

$$M_{\dot{\alpha}} = -\frac{QSc}{I_y} \left(\frac{c}{2V} \right) C_{m_{\dot{\alpha}}} \quad (5.46)$$

Par convention, les dérivées adimensionnées sont définies comme suit :

$$C_{D_{\dot{\alpha}}} = \frac{\partial C_D}{\partial(\dot{\alpha}c/2V)} \quad (5.47)$$

$$C_{L_{\dot{\alpha}}} = \frac{\partial C_L}{\partial(\dot{\alpha}c/2V)} \quad (5.48)$$

$$C_{m_{\dot{\alpha}}} = \frac{\partial C_m}{\partial(\dot{\alpha}c/2V)} \quad (5.49)$$

$$(5.50)$$

Les efforts aérodynamiques dus à $\dot{\alpha}$ sont, principalement, dus à la partie horizontale de l'empennage arrière. Dans un premier temps nous ne tiendrons donc pas compte de la contribution de l'aile principale. Pour modéliser l'influence de $\dot{\alpha}$, nous allons faire les hypothèses suivantes :

- La déflexion de l'air du niveau de l'empennage arrière due à l'aile principale ne voit pas instantanément les fluctuations d'incidence.
- la déflexion de l'air au niveau de l'empennage est due aux deux tourbillons marginaux générés par l'aile.
- Ces deux tourbillons sont convectés à la vitesse de l'air ambiant (V). Ils mettent donc un temps, $\Delta t = l_H/V$ pour convecter l'information de l'aile jusqu'à l'empennage arrière.
- La déflexion de l'air, ϵ_H , est due à ce que l'aile a vu ($t - \Delta t$) plutôt.

Pour obtenir la correction à ajouter à l'angle de déflexion présent dans le cas stationnaire, il faut utiliser la formule suivante :

$$\Delta \epsilon_H = -\epsilon_{\alpha} \dot{\alpha} \Delta t \quad (5.51)$$

Avion	Mach de vol	C_{m_q}	$C_{m_{\dot{\alpha}}}$
Boeing 747	0.25	-20.8	-3.2
Convair 880	0.25	-12.1	-4.1
Lockheed Jetstar	0.25	-8.0	-3.0
Lockheed F-104A	0.25	-5.8	-1.6
LTV A-7A	0.30	-3.8	-0.7
Douglas A-4D	0.40	-3.7	-1.1

TABLE 5.1 – Coefficients C_{m_q} et $C_{m_{\dot{\alpha}}}$ pour différents avions.

La portance due à l'angle de déflexion peut être obtenue à partir :

$$\Delta C_L = \left(\frac{S_H}{S} \right) \left(\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \right) \epsilon_\alpha \dot{\alpha} \left(\frac{l_H}{V} \right) \quad (5.52)$$

$$\Delta C_L = -2V_H \left(\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \right) \epsilon_\alpha \left(\frac{\dot{\alpha} c}{2V} \right) \quad (5.53)$$

Il est donc possible, à partir de cette équation, de trouver la dérivée de stabilité adimensionnée due à l'empennage arrière :

$$(\Delta C_{L_{\dot{\alpha}}})_H = 2V_H \epsilon_\alpha \left(\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \right)_H \quad (5.54)$$

De même nous pouvons obtenir :

$$(\Delta C_{m_{\dot{\alpha}}})_H = 2V_H \epsilon_\alpha \left(\frac{l_H}{c} \right) \left(\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \right)_H \quad (5.55)$$

Pour tenir compte de l'influence de l'aile principale, il est classique d'ajouter 10% à la contribution de l'empennage arrière pour estimer les coefficients de l'avion complet.

$$\Delta C_{L_{\dot{\alpha}}} = 2.2V_H \epsilon_\alpha \left(\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \right)_H \quad (5.56)$$

$$\Delta C_{m_{\dot{\alpha}}} = -2.2V_H \epsilon_\alpha \left(\frac{l_H}{c} \right) \left(\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \right)_H \quad (5.57)$$

La valeur de ϵ_α est pour les avions classiques de l'ordre de 0.2 à 0.4. Il est donc logique de trouver des valeurs de $M_{\dot{\alpha}}$ inférieures à M_q dans le même rapport. Ce résultat est mis en évidence dans le tableau 5.1 qui regroupe les coefficients $M_{\dot{\alpha}}$ et M_q pour différents avions.

5.2 Dérivées de stabilité transversales

Les dérivées de stabilité dans le plan latéral dépendent du dérapage de l'avion, $\beta(t) = v(t)/V$, de la vitesse de lacet, $r = d\Psi/dt$ et de la vitesse de roulis, $p = d\Phi/dt$ ainsi que des commandes contrôlant le lacet et le roulis δ . La contribution des termes en $\dot{\beta}$ est généralement négligeable et ne sera pas présentée dans ce manuscrit. La force et les moments concernés dans le cadre des études de stabilité transversale sont Y la force transversale et les moments de roulis L et de lacet N .

5.2.1 Dérivées de stabilité dues à β

Les dérivées dimensionnées sont :

$$Y_\beta = \frac{QS}{m} \frac{\partial C_y}{\partial \beta} \quad (5.58)$$

$$L_\beta = \frac{Q S b}{I_x} \frac{\partial C_l}{\partial \beta} \quad (5.59)$$

$$N_\beta = \frac{Q S b}{I_z} \frac{\partial C_n}{\partial \beta} \quad (5.60)$$

avec

- b , l'envergure de l'aile
- I_x , le moment d'inertie de l'avion autour de l'axe Ox
- I_z , le moment d'inertie de l'avion autour de l'axe Oz

Les dérivées de stabilité Y_β et N_{β} sont principalement dues à la partie verticale de l'empennage arrière et au fuselage. La contribution de l'aile est généralement considérée comme mineure.

La dérivée de stabilité dimensionnée de la force transversale peut être écrite comme suit :

$$\frac{\partial C_y}{\partial \beta} = \left(\frac{\Delta \partial C_y}{\partial \beta} \right)_{\text{fuselage}} - \left(\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \right)_V (1 - \sigma_\beta) \left(\frac{S_V}{S} \right) \eta_V \quad (5.61)$$

avec

- $(\Delta \partial C_y / \partial \beta)_{\text{fuselage}}$, la contribution du fuselage,
- $(\partial C_L / \partial \alpha)_V$, la pente de la courbe de portance de la partie verticale de l'empennage arrière calculée avec la surface S_V ,
- σ_β , la variation moyenne de la déviation de l'angle d'attaque en fonction de β , $\sigma_\beta = \partial \sigma / \partial \beta$,
- η_V , le rapport entre la pression dynamique au niveau de l'empennage arrière celle à l'infini amont : $\eta_V = Q_V / Q$.

Le signe moins devant la contribution de l'empennage arrière est dû au fait que celui-ci se trouve positionné à l'arrière du centre de gravité. Il est donc un élément stabilisant qui a tendance à réduire l'angle de dérapage β .

La contribution du fuselage est très dépendante de la configuration de l'avion et difficile à prévoir. Par contre, celle de la partie verticale de l'empennage peut être obtenue, assez facilement, en réalisant des essais en souffleries avec des maquettes sans empennage arrière puis avec. Lors de ces essais, l'angle de dérapage varie alors que l'angle d'incidence de l'avion est imposé constant. Le terme représentant la déflexion de l'air au niveau de l'empennage due au dérapage de l'avion, σ_β , dépend de l'incidence. Ainsi, si normalement sa valeur est de l'ordre de 0.3, elle peut atteindre 1 lorsque l'avion se situe à une incidence très élevée, proche de l'incidence de décrochage.

Le coefficient de stabilité caractérisant le moment de lacet peut être exprimé comme la superposition de trois moments dus à l'aile, au fuselage et à l'empennage arrière :

$$\frac{\partial C_n}{\partial \beta} = \left(\frac{\Delta \partial C_n}{\partial \beta} \right)_{\text{fuselage}} + \left(\frac{\Delta \partial C_n}{\partial \beta} \right)_{\text{aile}} + \left(\frac{\Delta \partial C_n}{\partial \beta} \right)_V \quad (5.62)$$

C_{n_β} a un effet stabilisant sur l'avion en ayant toujours tendance à ramener l'avion dans l'axe du vent pour ramener l'angle de dérapage, β , à zéro. L'avion peut, alors, être vu comme

une girouette. Le terme $(\Delta\partial C_n/\partial\beta)_{\text{fuselage}}$ est normalement déstabilisant alors que le terme $(\Delta\partial C_n/\partial\beta)_{\text{aile}}$, lui est légèrement stabilisant. Ces deux termes sont extrêmement durs à estimer. Cependant, la contribution de l'empennage arrière peut, elle, être estimée à partir de la formule suivante :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Delta\partial C_n}{\partial\beta}\right)_V &= + \left(\frac{\partial C_L}{\partial\alpha}\right)_V (1 - \sigma_\beta) \left(\frac{l_V}{b}\right) \left(\frac{S_V}{S}\right) \eta_V \\ &= + \left(\frac{\partial C_L}{\partial\alpha}\right)_V (1 - \sigma_\beta) V_V \eta_V \end{aligned} \quad (5.63)$$

avec $V_V = (S_V l_V / Sb)$ le coefficient de volume de la partie verticale de l'empennage arrière.

Le coefficient C_{n_β} a un signe positif quand il produit un effet stabilisant sur l'avion. Cependant C_{n_β} peut devenir très faible voire négatif pour de très forts angles d'attaque ce qui rend, alors, l'avion instable. Le C_{n_β} est très dépendant de l'angle de dérapage qui fait varier l'angle de déflexion au niveau de l'empennage arrière et de l'angle d'attaque. Il n'est donc pas rare, pour un même avion, de trouver dans les tables différentes valeurs de C_{n_β} tabulées en fonction de l'angle de dérapage β et de l'angle d'incidence α .

Le moment de roulis dû au dérapage de l'avion est le résultat de quatre effets aérodynamiques distincts : l'angle de dièdre de l'aile, l'interaction entre l'aile et le fuselage, la flèche de l'aile et la contribution de la partie verticale de l'empennage arrière. Bien que C_{l_β} soit la résultante de ces quatre effets, il est courant de dire qu'il caractérise l'effet dièdre de l'avion.

C_{l_β} dû au dièdre de l'aile :

Quand l'avion vole avec un angle de dérapage positif, l'avion voit l'air venir de sa droite. Il est possible de décomposer ce vecteur en un vecteur vitesse, V , parallèle à l'axe de symétrie de l'avion et un vecteur vitesse, $V\beta$, perpendiculaire à cet axe de symétrie orienté de la droite vers la gauche de l'avion.

Pour comprendre l'impact du dérapage sur le moment de roulis dans le cas d'une aile ayant un angle de dièdre positif, il suffit de décomposer ce vecteur vitesse transverse $V\beta$ en un vecteur tangent au profil d'aile et un vecteur vertical pointant vers haut pour l'aile de droite et un vecteur pointant vers le bas pour l'aile de gauche. L'aile de droite voit alors l'air arriver avec un angle augmenté de $\Delta\alpha$ et celle de gauche avec un angle d'incidence réduit de $\Delta\alpha$. Cette dissymétrie entraîne une augmentation de portance sur l'aile droite et une diminution sur l'aile gauche ce qui provoque la montée de l'aile droite et la descente de l'aile gauche. Le coefficient C_{l_β} est donc négatif pour un avion ayant un angle de dièdre positif.

L'augmentation locale de l'incidence sur l'aile droite entraîne une augmentation de traînée alors que la diminution locale d'incidence sur l'aile gauche entraîne une diminution de locale de la traînée. Cette dissymétrie crée un moment de lacet positif, $C_{n_\beta} > 0$, qui tend à stabiliser statiquement l'avion.

C_{l_β} dû à l'interférence entre le fuselage et l'aile :

L'impact de la position de l'aile par rapport au fuselage sur le moment de roulis lorsque l'avion vole avec un angle de dérapage positif est illustré sur la figure 5.3. L'avion peut être vu comme subissant un vent de travers $V\beta$. Dans le cas où l'aile est en position haute l'aile droite subit une augmentation de portance alors que l'aile gauche subit une diminution de portance.

Cette dissymétrie, dans la répartition de portance, provoque l'apparition d'un moment de roulis négatif. Le coefficient C_{l_β} est donc négatif dans le cas d'une aile haute et vient amplifier l'effet dièdre. Dans le cas d'une aile basse, C_{l_β} est positif ce qui tend à réduire l'effet dièdre.

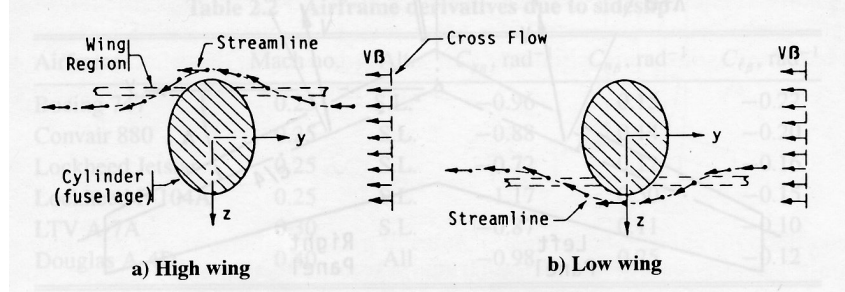


FIGURE 5.3 – Interférence entre le fuselage et l'aile sur le coefficient C_l [tirée de ?]

Normalement pour assurer les critères de stabilité statique, il est conseillé d'avoir un coefficient C_{l_β} négatif. Cependant, pour faciliter la maintenance des moteurs d'avion, il est courant de choisir une configuration aile basse. Dans ce cas, le constructeur devra compenser la contribution positive au C_{l_β} par les trois autres phénomènes que nous présentons.

C_{l_β} dû à la flèche de l'aile :

Il est possible de mettre en évidence l'impact de la flèche, en regardant chaque aile séparément. La portance vue par chaque aile est donnée par les deux expressions suivantes :

$$L_{\text{droite}} = C_L Q (S/2) \cos^2(\Gamma - \beta) \quad (5.64)$$

$$L_{\text{gauche}} = C_L Q (S/2) \cos^2(\Gamma + \beta) \quad (5.65)$$

L'avion subit donc une dissymétrie dans sa portance, l'aile droite connaissant une portance supérieure à celle de gauche. La présence d'une flèche positive sur l'avion apporte donc une contribution négative au coefficient C_{l_β} .

De même, la flèche contribue à créer une dissymétrie de traînée entre l'aile gauche et l'aile droite. L'aile droite subissant une traînée supérieure à celle de l'aile gauche ce qui crée un moment de roulis positif, $C_{n_\beta} > 0$.

Traditionnellement, on considère que six degrés de flèche ont le même impact sur le coefficient C_{l_β} qu'un degré de dièdre.

C_{l_β} dû à la partie verticale de l'empennage arrière :

Nous avons vu que la partie verticale de l'empennage arrière avait un fort impact sur les coefficients C_{y_β} et C_{n_β} . Sa contribution au terme $C_{l_{\beta\eta}}$ est très faible et généralement négative ce qui tend à stabiliser l'avion. Cependant, elle est très dépendante de la configuration de l'avion ainsi que de l'angle d'attaque.

Pour conclure nous avons reporté dans la table 5.2 les coefficients C_{y_β} , C_{n_β} et C_{l_β} pour différents avions à titre d'illustration.

Avion	Mach	C_{y_β}	C_{n_β}	C_{l_β}
Boeing 747	0.25	-0.96	0.15	-0.22
Convair 880	0.25	-0.88	0.14	-0.20
Lockheed Jetstar	0.25	-0.72	0.12	-0.16
Lockheed F-104A	0.25	-1.17	0.50	-0.15
LTV A-7A	0.30	-0.87	0.11	-0.10
Douglas A-4D	0.40	-0.98	0.25	-0.12

TABLE 5.2 – Dérivées de stabilité dues au dérapage

5.2.2 Dérivées de stabilité dues au moment de lacet, r

La vitesse de lacet produit une force transversale et des moments de roulis et de lacet qui sont donnés ici sous forme dimensionnée :

$$Y_r = \frac{QS}{m} \left(\frac{b}{2V} \right) C_{y_r} \quad (5.66)$$

$$L_r = \frac{QSb}{I_x} \left(\frac{b}{2V} \right) C_{l_r} \quad (5.67)$$

$$N_r = \frac{Qb}{I_y} \left(\frac{b}{2V} \right) C_{n_r} \quad (5.68)$$

Par définition, les dérivées adimensionnées s'écrivent comme suit :

$$C_{y_r} = \frac{\partial C_y}{\partial (rb/2V)} \quad (5.69)$$

$$C_{l_r} = \frac{\partial C_l}{\partial (rb/2V)} \quad (5.70)$$

$$C_{n_r} = \frac{\partial C_n}{\partial (rb/2V)} \quad (5.71)$$

La figure 5.4 présente un avion subissant un mouvement de lacet pur. Le centre de rotation du mouvement est situé à une distance R de l'avion sur l'axe Oy du repère avion.

La dérivée adimensionnée C_{y_r} peut se décomposer en deux termes. Le premier représente la contribution de la partie verticale de l'empennage arrière et le second la contribution de l'aile :

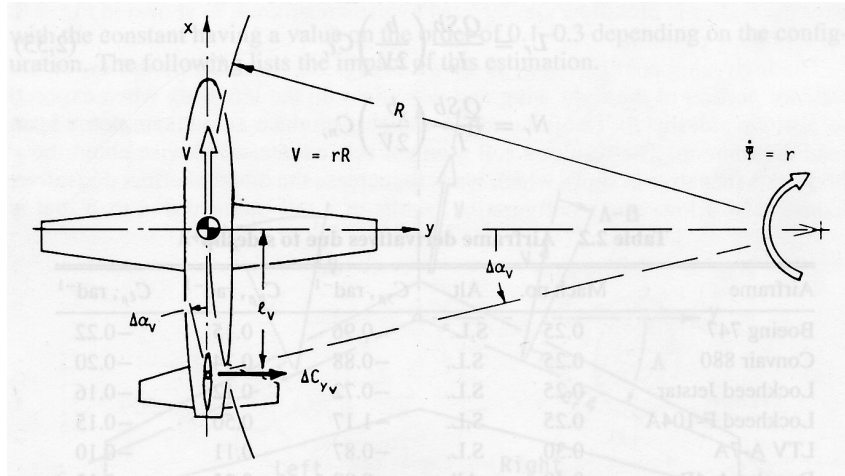
$$\frac{\partial C_y}{\partial (rb/2V)} = \left[\frac{\partial C_y}{\partial (rb/2V)} \right]_V + \left[\frac{\partial C_y}{\partial (rb/2V)} \right]_{\text{aile}} \quad (5.72)$$

Pour déterminer la contribution de la partie verticale de l'empennage arrière, il suffit de procéder de la même façon que pour la partie horizontale de ce même empennage dans le cas du tangage. Cette contribution est donc dépendante de l'angle d'incidence que voit l'empennage arrière.

$$\Delta\alpha_V = l_V/R = l_V r/V \quad (5.73)$$

ce qui donne pour la contribution de l'empennage arrière :

$$\left[\frac{\partial C_y}{\partial (rb/2V)} \right]_V = \left(\frac{S_V}{S} \right) \left(\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \right) \left(\frac{2l_V}{b} \right) \quad (5.74)$$

FIGURE 5.4 – Influence du dérapage sur le coefficient C_l [tirée de ?]

La contribution de l'aile est considérée comme négligeable ce qui permet d'identifier C_{y_r} avec l'expression donnée par 5.74. Cependant, ce terme est souvent absent dans les tables qui regroupent les caractéristiques des avions. En effet sa contribution aux efforts latéraux exercés sur l'avion est mineure. Le moment de roulis induit par un mouvement de lacet est principalement dû à la partie verticale de l'empennage arrière et à l'aile. La contribution du fuselage est considérée comme négligeable. C_{l_r} s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_l}{\partial (rb/2V)} &= \left[\frac{\partial C_l}{\partial (rb/2V)} \right]_V + \left[\frac{\partial C_l}{\partial (rb/2V)} \right]_{\text{aile}} \\ &= (\Delta C_{l_r})_V + (\Delta C_{l_r})_{\text{aile}} \end{aligned} \quad (5.75)$$

Le coefficient $(C_{l_r})_V$ peut être estimé en considérant que le moment de roulis induit par l'empennage arrière est dû à la force exercée sur la dérive. Cette force est appliquée en un point situé à la verticale de l'axe Ox à une distance z_V . z_V est exprimé dans le repère avion, c'est à dire positif vers le bas et négatif vers le haut. La dérive étant traditionnellement située haut dessus de l'avion, le coefficient $(C_{l_r})_V$ doit être positif pour assurer un moment de roulis positif. Il est alors possible d'exprimer $(C_{l_r})_V$ comme suit :

$$(\Delta C_{l_r})_V = - \left(\frac{z_V}{b} \right) (C_{y_r})_V \quad (5.76)$$

La contribution de l'aile est particulièrement importante dans cet effet dit de "dérivées croisées" où le lacet induit un effet de roulis. Elle peut être estimée en considérant que la pression dynamique (Q) va subir une dissymétrie en étant augmentée sur l'aile gauche et réduite sur l'aile droite. Ce phénomène va induire une dissymétrie dans la portance de l'avion et va conduire à la création d'un moment de roulis positif. Ce moment de roulis peut être approché dans une première étape par la formule suivante :

$$(\Delta C_{l_r})_{\text{aile}} = + \left(\frac{C_L}{4} \right) \quad (5.77)$$

Avion	Mach	C_{y_r}	C_{n_r}	C_{l_r}
Boeing 747	0.25	-0.96	-0.30	0.10
Convair 880	0.25	-0.88	-0.19	0.20
Lockheed Jetstar	0.25	-0.72	-0.14	0.10
Lockheed F-104A	0.25	-1.17	-0.73	0.25
LTV A-7A	0.30	-0.87	-0.31	0.15
Douglas A-4D	0.40	-0.98	-0.35	0.14

TABLE 5.3 – Dérivées de stabilité dues au lacet

Pour conclure sur le coefficient C_{l_r} , nous pouvons dire qu'il est généralement positif et qu'il est fortement influencé par le coefficient de portance de l'avion ainsi que la partie verticale de l'empennage arrière.

$$C_{l_r} = + \left(\frac{C_L}{4} \right) - \left(\frac{z_V}{b} \right) (C_{y_r})_V \quad (5.78)$$

Le terme, C_{n_r} , est connu comme le terme d'amortissement en lacet. Comme le terme C_{n_r} , il est principalement dû à l'empennage arrière et aux ailes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_n}{\partial (rb/2V)} &= \left[\frac{\partial C_n}{\partial (rb/2V)} \right]_V + \left[\frac{\partial C_n}{\partial (rb/2V)} \right]_{\text{aile}} \\ &= (\Delta C_{n_r})_V + (\Delta C_{n_r})_{\text{aile}} \end{aligned} \quad (5.79)$$

La contribution de l'aile est due à l'application de la force C_{y_r} sur la dérive. Si celle-ci est située à l'arrière du centre de gravité, l'effet est stabilisant, le moment, ainsi créé, étant négatif. Une bonne approximation pour ce terme est :

$$(\Delta C_{n_r})_V = -(l_V/b)(\Delta C_{y_r})_V \quad (5.80)$$

La contribution de l'aile peut être estimée en regardant, séparément, l'influence du lacet sur chaque aile. Un lacet positif entraîne une augmentation de la traînée sur l'aile de gauche ainsi qu'une diminution sur celle de droite. Cette dissymétrie induit un moment de lacet négatif donc stabilisant. Cependant la contribution de l'aile reste négligeable comparée à celle de la partie verticale de l'empennage arrière.

Le tableau 5.3 regroupe les coefficients C_{l_r} et C_{n_r} pour différents avions. Le coefficient C_{y_r} n'est pas présenté car il est proche de zéro.

5.2.3 Dérivées de stabilité dues au moment de roulis, p

Le taux de roulis induit une force transversale sur l'avion ainsi qu'un moment de lacet et un moment de roulis dont les dérivées dimensionnées sont donnée par :

$$Y_p = \frac{QS}{m} \left(\frac{b}{2V} \right) C_{y_p} = 0 \quad (\text{par hypothèse}) \quad (5.81)$$

$$L_p = \frac{QSb}{I_x} \left(\frac{b}{2V} \right) C_{l_p} \quad (5.82)$$

$$N_p = \frac{Qb}{I_y} \left(\frac{b}{2V} \right) C_{n_p} \quad (5.83)$$

Par définition, les dérivées adimensionnées s'écrivent comme suit :

$$C_{y_p} = \frac{\partial C_y}{\partial (pb/2V)} = 0 \quad (\text{par hypothèse}) \quad (5.84)$$

$$C_{l_p} = \frac{\partial C_l}{\partial (pb/2V)} \quad (5.85)$$

$$C_{n_p} = \frac{\partial C_n}{\partial (pb/2V)} \quad (5.86)$$

Nous supposons ici que le mouvement de roulis se fait autour de l'axe Ox et que l'angle de d'incidence sur chaque aile reste inférieur à l'angle de décrochage. Comme nous pouvons le voir sur la figure 5.5, le taux de roulis induit une variation d'angle d'attaque positive de $\Delta\alpha(b/2)$ au bout de l'aile de droite et une variation négative de $-\Delta\alpha(b/2)$ au bout de l'aile gauche. Cette répartition antisymétrique est responsable des effets du taux de roulis sur les coefficients aérodynamiques.

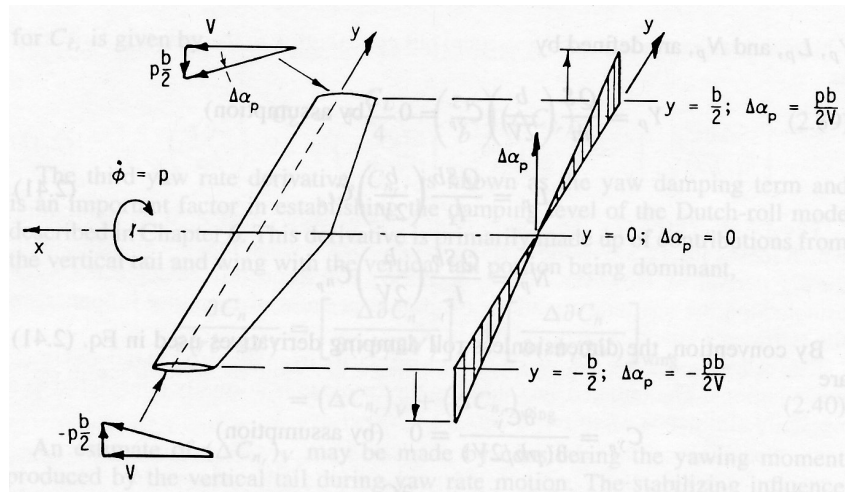


FIGURE 5.5 – Influence du taux de roulis [tirée de ?]

Le coefficient C_{n_p} peut être interprété en regardant, localement, les variations d'angle d'attaque sur les ailes. Ces variations vont créer une variation locale de la traînée frottement et de la traînée induite. Les variations d'angles d'attaque provoquent une augmentation de la traînée de frottement sur l'aile droite et une diminution sur l'aile gauche. Cette variation antisymétrique de la traînée de frottement induit l'apparition d'un moment de lacet positif. Cependant la contribution positive au terme C_{n_p} est souvent négligeable devant les effets dus à la variation de traînée induite.

L'impact de la modification de la traînée induite peut être relié directement au coefficient de portance. Une bonne approximation est donnée par :

$$C_{n_p} = -(C_L/8) \quad (5.87)$$

La dérivée C_{l_p} caractérise l'amortissement en roulis. La vitesse de roulis induit comme nous l'avons vu précédemment une variation de l'angle d'incidence le long de l'aile. Cette variation

Avion	Mach	C_{y_p}	C_{n_p}	C_{l_p}
Boeing 747	0.25	-0.96	-0.12	-0.45
Convair 880	0.25	-0.88	-0.05	-0.38
Lockheed Jetstar	0.25	-0.12	-0.14	-0.37
Lockheed F-104A	0.25	-0.14	-0.73	-0.29
LTV A-7A	0.30	-0.87	-0.01	-0.25
Douglas A-4D	0.40	-0.98	+0.02	-0.26

TABLE 5.4 – Dérivées de stabilité dues au roulis

entraîne une répartition antisymétrique de portance le long de l'aile (voir figure 5.5) mais ne produit pas de variation de la portance totale due à l'aile. Cependant un moment de roulis est créé. Le coefficient C_{l_p} associé à ce moment est donné négatif ce qui tend à amortir le mouvement de roulis.

Le tableau 5.4 regroupe les coefficients C_{l_p} et C_{n_p} pour différents avions. Le coefficient C_{y_p} n'est pas présenté car il est proche de zéro.

5.2.4 Dérivées de stabilité dues aux commandes latérales

Les dérivées dimensionnelles dues aux ailerons de contrôle latérales sont :

$$Y_\delta = \frac{QS}{m} C_{y_\delta} \quad (5.88)$$

$$L_\delta = \frac{QSb}{I_x} C_{l_\delta} \quad (5.89)$$

$$N_\delta = \frac{Qb}{I_y} C_{n_\delta} \quad (5.90)$$

Par définition, les dérivées adimensionnées s'écrivent comme suit :

$$C_{y_\delta} = \frac{\partial C_y}{\partial \delta} \quad (5.91)$$

$$C_{l_\delta} = \frac{\partial C_l}{\partial \delta} \quad (5.92)$$

$$C_{n_\delta} = \frac{\partial C_n}{\partial \delta} \quad (5.93)$$

Pour contrôler l'avion durant ses évolutions latérales, il est possible d'utiliser différentes configurations. Les configurations récentes se présentent comme suit :

- Des ailerons qui sont placés au bout des ailes. Ces ailerons créent une portance antisymétrique.
- Des spoilers qui sont placés sur l'extrados des ailes. Lorsque l'on sort un spoiler sur l'une des ailes, il provoque une réduction de la portance et donc un moment de roulis. L'avantage des spoilers est qu'ils n'introduisent pas d'effet de torsion trop fort dans l'aile contrairement aux ailerons. Lorsque les deux spoilers sont sortis, ils peuvent être utilisés comme aérofreins. Dans un atterrissage classique, les spoilers sont sortis quand l'avion touche le sol.

Par convention l'angle de sortie des ailerons est considéré positif quand l'aileron de l'aile droite monte ce qui provoque un moment de roulis positif. Cette convention est loin d'être standard dans la littérature.

La dérivée Y_δ est généralement négligée.

La dérivée N_δ est due à la répartition antisymétrique des efforts sur l'aile dus aux ailerons. Pour un angle de sortie positif des ailerons, l'aile droite subit une diminution de sa portance et de sa traînée induite alors que l'aile gauche, elle, subit une augmentation. La différence de traînée conduit à l'apparition d'un moment de lacet négatif. Dans le cas où le pilote utilise les spoilers, l'augmentation de la traînée de frottement du profil peut être supérieure à la réduction de la traînée induite, ce qui conduit alors à la création d'un moment de lacet positif.

Chapitre 6

Stabilité dynamique longitudinale

Dans ce chapitre, nous allons étudier le comportement dynamique longitudinal d'un avion. Les équations qui décrivent les mouvements de l'avion, détaillées au chapitre 4, sont :

$$V(\dot{u}/V) = VX_u(u/V) + X_\alpha\alpha - g \cos \Theta_0 \Theta + X_\delta\delta \quad (6.1)$$

$$(V - Z_\dot{\alpha})\dot{\alpha} = VZ_u(u/V) + Z_\alpha\alpha + (V + Z_q)q - g \sin \Theta_0 \Theta + Z_\delta\delta \quad (6.2)$$

$$-M_\dot{\alpha}\dot{\alpha} + \dot{q} = VM_u(u/V) + M_\alpha\alpha + M_qq + M_\delta\delta \quad (6.3)$$

$$\dot{\Theta} = q \quad (6.4)$$

Les différents modes propres rencontrés sur les avions seront illustrés dans le cas de l'avion d'attaque américain A-4D.

Les avions classiques présentent normalement deux modes propres longitudinaux différents. Le premier appelé "*oscillations d'incidence*" ou "*courte période*" est associé à un jeu de deux valeurs propres complexes conjuguées. Le second associé aux deux autres valeurs propres complexes conjuguées est une oscillation plus basse fréquence qui est souvent appelé "*phugoïde*".

6.1 Cas de l'avion d'attaque A-4D

A partir des données fournies en annexe B.3, nous pouvons calculer le système 4.100. Nous ne tiendrons pas compte de l'action des commandes puisque nous cherchons à déterminer les modes propres de l'avion et non sa réponse à une commande. Le système 4.100 devient alors :

$$\begin{pmatrix} \Delta \dot{u}/V \\ \dot{\alpha} \\ \dot{q} \\ \Delta \dot{\Theta} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \Delta u/V \\ \alpha \\ q \\ \Delta \Theta \end{pmatrix} \quad (6.5)$$

avec

$$A = \begin{bmatrix} -0.0129 & -0.0059 & 0.0 & -0.0507 \\ -0.1040 & -0.8185 & 1.0 & 0.0 \\ 0.2867 & -12.6811 & -1.4240 & 0.0 \\ 0.0 & 0.010 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

Les valeurs propres associées à la matrice A sont :

$$\begin{aligned} -1.1211 \pm 3.5472i & \text{ oscillation d'incidence} \\ -0.0065 \pm 0.0752i & \text{ phugoïde} \end{aligned}$$

6.2 L'oscillation d'incidence

L'oscillation d'incidence est associée aux vecteurs propres :

$$\lambda_{sp} = -1.1211 \pm 3.5472i$$

Ce mouvement est une oscillation fortement amortie dont la fréquence et le coefficient d'amortissement sont :

$$\begin{aligned} \zeta_{sp} &= 0.3014 \\ \omega_n &= 3.7202 \text{ rad/s} \\ T_{sp} &= 1.77 \text{ s} \end{aligned}$$

Le vecteur propre associé à ce mode est :

$$\begin{pmatrix} \Delta u/V \\ \alpha \\ q \\ \Delta\Theta \end{pmatrix}_{sp} = \begin{pmatrix} -0.0016 \pm 0.0035i \\ 0.1539 \pm 0.2117i \\ -0.7977 \pm 0.4822i \\ 0.1882 \pm 0.1654i \end{pmatrix}$$

Ce vecteur propre peut être exprimé en fonction de la phase et de l'amplitude suivant chaque direction. Pour cela, nous le normalisons par l'amplitude associée à la direction α (ce choix est tout à fait arbitraire).

$$\begin{pmatrix} \Delta u/V \\ \alpha \\ q \\ \Delta\Theta \end{pmatrix}_{sp} = \begin{pmatrix} 0.0146 & \angle & 61.33 \text{ deg} \\ 1.0000 & \angle & 0.0 \text{ deg} \\ 3.5614 & \angle & 94.86 \text{ deg} \\ 0.9573 & \angle & -12.68 \text{ deg} \end{pmatrix}$$

A partir de l'analyse du vecteur propre, nous pouvons constater que les perturbations en vitesse sont négligeables par rapport aux perturbations en incidence, vitesse de tangage et assiette. Ceci conduit à supposer $u/V = 0$ quand on se place dans l'approximation du mode *oscillation d'incidence*. L'angle d'assiette Θ , et celui d'attaque α , subissent des perturbations de même amplitude et quasiment en phase. Le déplacement du centre de gravité de l'avion est donc à peu près linéaire.

La représentation du vecteur propre dans l'espace des phases est donné sur la figure 6.1.

Une évolution temporelle des quatre grandeurs caractérisant l'avion après une perturbation initiale, suivant le vecteur propre du mode "*oscillation d'incidence*", est donnée sur la figure 6.2. Les valeurs initiales étaient :

$$\begin{pmatrix} \Delta u/V \\ \alpha \\ q \\ \Delta\Theta \end{pmatrix}_0 = \begin{pmatrix} 0.0070 \\ 1.0000 \\ 0.3017 \\ 0.9340 \end{pmatrix}$$

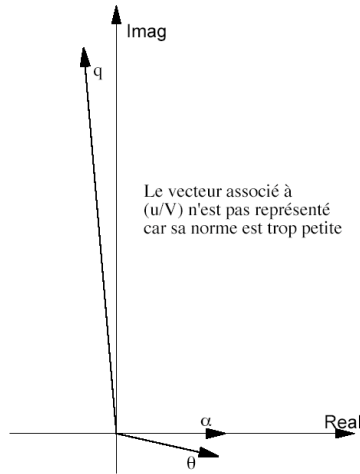


FIGURE 6.1 – vecteur propre dans l’espace des phases.

Nous pouvons constater que ce mode est rapidement amorti. Cependant, il faut noter que la fréquence propre de ce mode est de l’ordre de la seconde, ce qui correspond à la fréquence de réponse de l’homme. Il est donc important de s’assurer que le pilote ne pourra en aucun rentrer en résonance avec l’avion.

6.3 La Phugoïde

La phugoïde est, elle, associée aux vecteurs propres :

$$\lambda_{lp} = -0.0065 \pm 0.0752i$$

Ce mouvement, contrairement à l’oscillation d’incidence, est faiblement amorti et de grande amplitude. Les grandeurs caractéristiques qui lui sont associées sont, dans le cas du chasseur A-4D :

$$\zeta_{lp} = 0.0867$$

$$\omega_n = 0.0755 \text{ rad/s}$$

$$T_{lp} = 83.55 \text{ s}$$

Le vecteur propre associé à ce mode, exprimé en fonction de la phase et de l’amplitude suivant chaque direction, est :

$$\begin{pmatrix} \Delta u/V \\ \alpha \\ q \\ \Delta \Theta \end{pmatrix}_{lp} = \begin{pmatrix} 1.0000 \angle 0.0 \text{ deg} \\ 0.0101 \angle -3.91 \text{ deg} \\ 0.1122 \angle 0.10 \text{ deg} \\ 1.4870 \angle -94.87 \text{ deg} \end{pmatrix}$$

La représentation du vecteur propre dans l’espace des phases est donnée sur la figure 6.3. Nous pouvons voir que les amplitudes des perturbations associées à (u/V) et $\Delta \Theta$ sont du même ordre de grandeur. Par contre, elles sont déphasées d’environ 90 degrés.

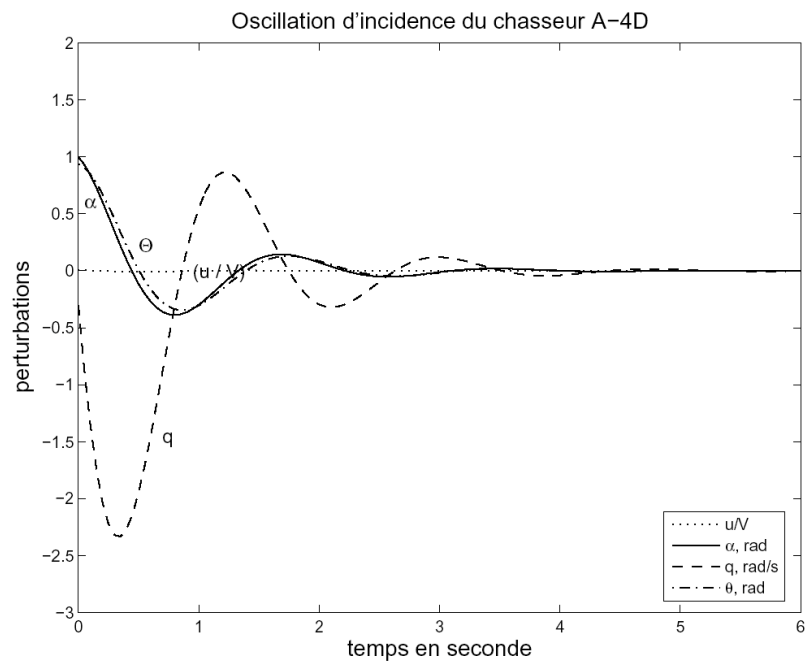


FIGURE 6.2 – Réponse temporelle de l’avion A-4D à une excitation du mode “*oscillation d’incidence*”

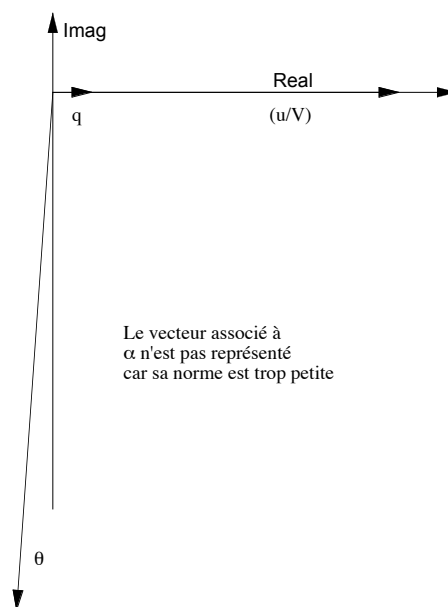


FIGURE 6.3 – Vecteurs propres dans l’espace des phases

L'évolution temporelle des grandeurs caractéristiques de l'avion est donnée sur la figure 6.4. Nous pouvons voir que les perturbations d'incidence sont négligeables par rapport à celles de vitesse contrairement au cas de l'oscillation d'incidence. L'évolution du centre de gravité est une oscillation amortie autour de l'horizontal. Au cours de ce mouvement, la vitesse augmente (diminue) quand l'altitude diminue (augmente).

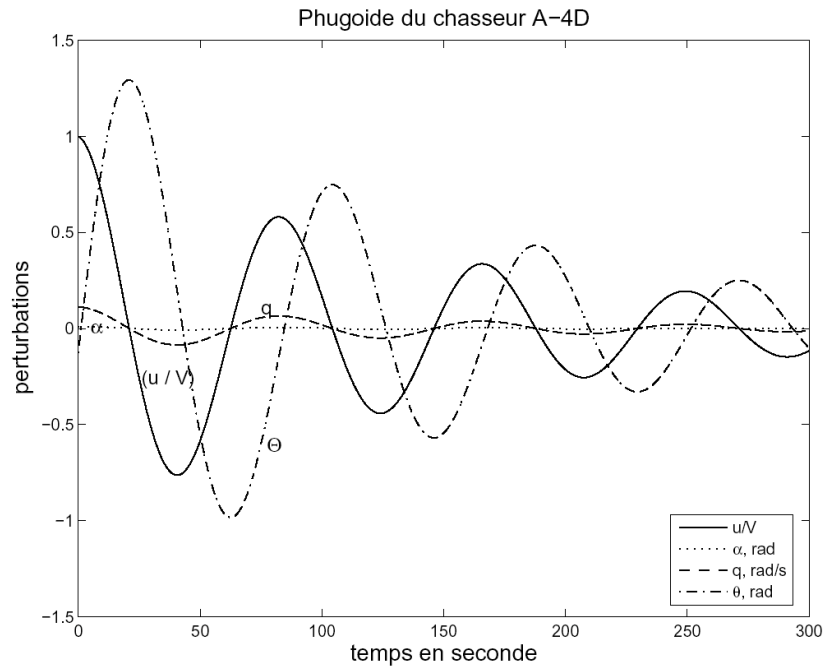


FIGURE 6.4 – Réponse temporelle de l'avion A-4D à une excitation du mode "phugoid"

6.4 L'approximation de l'oscillation d'incidence

Il est possible de simplifier le système complet d'équations qui décrit les évolutions de l'avion pour déterminer un système réduit qui reproduit correctement l'oscillation d'incidence. Pour cela, nous allons nous faire les hypothèses suivantes :

- Les perturbations de $\Delta u/V$ sont négligeables devant celles de α et $\Delta\theta$.
- Le centre de gravité a une vitesse de déplacement supposée constante, $u(t)/V = 0$. Dans ce cas, l'équation 6.1 peut être négligée.
- Les perturbations commencent avec une assiette nulle à l'instant $t = 0$.

Le système décrivant le mouvement de l'avion se réduit alors à :

$$\begin{aligned} (V - Z_{\dot{\alpha}})\dot{\alpha} &= Z_{\alpha}\alpha + (V + Z_q)q + Z_{\delta}\delta \\ -M_{\dot{\alpha}}\dot{\alpha} + \dot{q} &= M_{\alpha}\alpha + M_qq + M_{\delta}\delta \end{aligned} \tag{6.7}$$

Il est possible de réécrire le système 6.7 comme suit :

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= \frac{Z_\alpha}{(V - Z_{\dot{\alpha}})}\alpha + \frac{V + Z_q}{(V - Z_{\dot{\alpha}})}q + \frac{Z_\delta}{(V - Z_{\dot{\alpha}})}\delta \\ \dot{q} &= \left[M_\alpha + \frac{M_{\dot{\alpha}}Z_\alpha}{(V - Z_{\dot{\alpha}})} \right] \alpha + \left[M_q + \frac{(V + Z_q)M_{\dot{\alpha}}}{(V - Z_{\dot{\alpha}})} \right] q + \left[M_\delta + \frac{M_{\dot{\alpha}}Z_\delta}{(V - Z_{\dot{\alpha}})} \right] \delta\end{aligned}\quad (6.8)$$

Il est aussi possible de négliger Z_q et $Z_{\dot{\alpha}}$ par rapport à la vitesse V . Le système précédent devient alors :

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_\alpha/V & 1 \\ M_\alpha + \frac{M_{\dot{\alpha}}Z_\alpha}{V} & (M_q + M_{\dot{\alpha}}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_\delta/V \\ M_\delta + \frac{M_{\dot{\alpha}}Z_\delta}{V} \end{bmatrix} \delta \quad (6.9)$$

Ce système peut, aussi, s'écrire sous la forme :

$$\dot{x} = [A]x + [B]\delta \quad (6.10)$$

Dans le cas de l'avion A-4D que nous venons de traiter, la matrice $[A]$ est la suivante :

$$[A] = \begin{bmatrix} -0.8185 & 1.000 \\ 12.6811 & -1.424 \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

Nous trouvons alors comme valeur propre pour l'oscillation d'incidence :

$$\lambda_{sp} = -1.1213 \pm 3.5482i$$

Les paramètres caractérisant l'amortissement du mouvement oscillatoire sont les suivants :

$$\zeta_{sp} = 0.3013 \quad (6.12)$$

$$\omega_n = 3.7211 \quad (6.13)$$

Le vecteur propre associé à l'oscillation d'incidence est alors :

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0000 & \angle & 0.0 \text{ deg} \\ 3.5610 & \angle & 94.88 \text{ deg} \end{pmatrix}$$

Il est possible d'estimer Θ à partir de $q = \dot{\Theta}$:

$$\Theta_{est} = 0.9571 \quad \angle \quad -12.66 \text{ deg}$$

A partir de ces résultats, il est possible de faire une autre approximation en remarquant que $\alpha \cong \Theta$ et en imposant que l'avion ne subit qu'un mouvement de tangage. Ceci revient à dire que l'avion n'a pas de mouvement suivant l'axe vertical. Cette hypothèse induit que l'équation caractérisant le bilan des forces suivant l'axe Oz n'a plus de raison d'être. De même, les dérivées de stabilité associées à la force verticale Z_i doivent être retirées des équations. Le système 6.7 devient alors :

$$\ddot{\alpha} - (M_{\dot{\alpha}} + M_q)\dot{\alpha} - M_\alpha\alpha = M_\delta\delta \quad (6.14)$$

Par identification avec l'équation :

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = f(t) \quad (6.15)$$

	Sol. exacte	Approx Eq. 6.7	Approx Eq. 6.14
Valeur propre	$-1.121 \pm 3.547i$	$-1.121 \pm 3.548i$	$-0.712 \pm 3.530i$
ζ	0.301	0.301	0.198
ω_n	3.7202 rad/s	3.7211 rad/s	3.601 rad/s
] Vecteur propre			
	(u/v)	/	/
	α	$1.000 \angle 0.0 \text{ deg}$	$1.000 \angle 0.0 \text{ deg}$
	q	$3.561 \angle 94.86 \text{ deg}$	/
	Θ	$0.957 \angle -12.68 \text{ deg}$	$1.000 \angle 0.0 \text{ deg}$

TABLE 6.1 – Récapitulatif des grandeurs caractérisant l'oscillation d'incidence suivant les approximations faites.

On obtient :

$$\omega_n = \sqrt{-M_\alpha} \quad (6.16)$$

$$\zeta = -(M_{\dot{\alpha}} + M_q)/(2\omega_n) \quad (6.17)$$

Dans le cas de l'avion A-4D, nous obtenons :

$$\omega_n = 3.601 \text{ rad/s}$$

$$\zeta = 0.198$$

$$\omega_d = \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n = 3.530 \text{ rad/s}$$

La valeur propre correspondant à cette approximation étant alors :

$$\lambda = -\zeta\omega_n \pm i\omega_d = -0.712 \pm 3.530i \text{ rad/s}$$

Une comparaison des résultats obtenus pour les deux approximations de mode oscillation d'incidence et le mode exact est donnée dans le tableau 6.1. La première approximation qui suppose que $(u/V) = 0$ donne des résultats en parfait accord avec la description complète de l'avion. Ce résultat montre que le bilan des forces de traînée et de propulsion n'a pas d'influence sur le mode oscillation d'incidence. La deuxième approximation qui repose sur l'hypothèse que $(u/V) = 0$ et $\alpha \cong \Theta$, limite la description du phénomène à la seule équation pour le moment de tangage. Comme on peut le voir dans le tableau 6.1, cette approximation sous-estime grandement l'amortissement du mode (environ 34% d'erreur) alors que l'estimation de la fréquence ω_n est très correctement reproduite (environ 0.5% d'erreur). Nous pouvons, donc, conclure que le faible mouvement vertical contribue grandement à l'amortissement de l'oscillation d'incidence sans avoir la moindre influence sur la fréquence du mouvement.

Il est important de noter que, si la première approximation donne de bons résultats pour un avion ayant une marge statique standard, quand celle-ci tend vers zéro, cette approximation ne peut plus être utilisée.

6.5 L'approximation phugoïde

Comme nous l'avons vu dans la section 6.3 et contrairement au mode oscillation d'incidence, la perturbation de vitesse est prédominante, alors que les évolutions de l'incidence sont négligeables. C'est pourquoi dans le cas de l'approximation phugoïde, l'incidence sera supposée constante au cours du temps. De plus pour réduire de un, le nombre de variables dont on doit tenir compte, nous allons écarter l'équation de tangage. Il est en effet possible de la sortir du système pour des vols à bas ou moyen Mach car, dans ce cas, les effets de compressibilité sont négligeables donc $M_u = 0$. De plus, nous supposons que le mouvement est indépendant la marge statique ce qui induit que $M_\alpha = 0$. En tenant compte de ces deux hypothèses, l'équation de tangage est complètement découplée des autres.

Nous obtenons alors un système simplifié :

$$\begin{aligned} (\dot{u}/V) &= X_u(u/V) - (g/V)\Theta + (X_\delta/V)\delta \\ q &= -Z_u(u/V) + 0 - (Z_\delta/V)\delta \end{aligned} \quad (6.18)$$

en utilisant la relation $q = \dot{\Theta}$, il est possible d'écrire :

$$\begin{pmatrix} (\dot{u}/V) \\ \dot{\Theta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} X_u & -g/V \\ -Z_u & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} (u/V) \\ \Theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_\delta/V \\ -Z_\delta/V \end{pmatrix} \delta \quad (6.19)$$

ce système se présente sous la forme classique :

$$\dot{x} = [A]x + [B]\delta \quad (6.20)$$

L'équation caractéristique du système est donnée par : $|\lambda I - A| = 0$, ou encore :

$$\begin{pmatrix} (\lambda - X_u) & +g/V \\ Z_u & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - X_u\lambda - (gZ_u/V) = 0 \quad (6.21)$$

Cette équation peut aussi s'écrire sous la forme :

$$\lambda^2 + 2\zeta\omega_n\lambda + \omega_n^2 = 0 \quad (6.22)$$

Par identification, nous obtenons :

$$\omega_n^2 = -gZ_u/V \quad (6.23)$$

$$2\zeta\omega_n = -X_u \quad (6.24)$$

Pour expliciter ces équations, il est utile de redonner les expressions suivantes :

$$X_u = -\frac{QS}{mV} \left[2C_D + M \frac{\partial C_D}{\partial M} \right] \quad (6.25)$$

$$Z_u = -\frac{QS}{mV} \left[2C_L + M \frac{\partial C_L}{\partial M} \right] \quad (6.26)$$

Pour des Mach de vol faible, les termes $M\partial C_D/\partial M$ et $M\partial C_L/\partial M$ peuvent être négligés. De plus, nous avons :

$$C_L = \frac{P}{QS} \quad (6.27)$$

ce qui donne en substituant dans l'équation 6.23 :

$$\omega_n^2 = -gZ_u/V = 2(g/V)^2 \quad (6.28)$$

ou encore

$$\omega_n = \sqrt{2}g/V \quad (6.29)$$

la période de l'oscillation est alors :

$$T_p = \sqrt{2}\pi(V/g) \quad (6.30)$$

Cette approximation permet de constater que les oscillations associées au mode phugoïde ont une fréquence faible.

En utilisant l'équation 6.24 on obtient :

$$2\zeta\omega_n = -X_u = \frac{\rho V S}{m} C_D \quad (6.31)$$

ou encore

$$\zeta = \frac{C_D}{\sqrt{2}C_L} = \frac{1}{\sqrt{2}f} \quad (6.32)$$

Cette équation permet de conclure que les avions performants, c'est à dire ayant une finesse très élevée, auront un taux d'amortissement de l'oscillation phugoïde très faible.

Chapitre 7

Stabilité dynamique transversale

Ce chapitre porte sur l'étude de la dynamique transversale de l'avion. Les équations qui régissent alors son mouvement sont :

$$\dot{\beta} = \frac{Y_\beta}{V}\beta + \frac{Y_p}{V}p + \frac{g \cos \Theta_0}{V}\Phi + \frac{Y_r - 1}{V}r + \frac{Y_\delta}{V}\delta \quad (7.1)$$

$$\dot{p} = G \left[L_\beta + N_\beta \frac{I_{xz}}{I_x} \right] \beta + G \left[L_p + N_p \frac{I_{xz}}{I_x} \right] p + G \left[L_r + N_r \frac{I_{xz}}{I_x} \right] r + G \left[L_\delta + N_\delta \frac{I_{xz}}{I_x} \right] \delta \quad (7.2)$$

$$\dot{\Phi} = p + \tan \Phi_0 r \quad (7.3)$$

$$\dot{r} = G \left[N_\beta + L_\beta \frac{I_{xz}}{I_z} \right] \beta + G \left[N_p + L_p \frac{I_{xz}}{I_z} \right] p + G \left[N_r + L_r \frac{I_{xz}}{I_z} \right] r + G \left[N_\delta + L_\delta \frac{I_{xz}}{I_z} \right] \delta \quad (7.4)$$

Les différents modes propres associés au mode transversal seront illustré pour l'avion McDonnell-Douglas DC-8. Nous nous limiterons au cas du vol à Mach 0.84 et à une altitude de 33 000 ft. L'ensemble des dérivées de stabilité correspondant à ce cas sont données dans l'annexe B.5.

Le système formé par les équations 7.1 à 7.4 peut s'écrire sous la forme matricielle :

$$\{\dot{x}\} = [A]\{x\} + [B]\{u\} \quad (7.5)$$

avec comme vecteur d'état :

$$\{x\} = [\beta \quad p \quad \Phi \quad r]^T \quad (7.6)$$

et

$$\{u\} = [\delta_r \quad \delta_a]^T \quad (7.7)$$

avec comme matrice caractérisant l'avion

$$A = \begin{bmatrix} \frac{Y_\beta}{V} & \frac{Y_p}{V} & \frac{g \cos \Theta_0}{V} & \frac{Y_r - 1}{V} \\ L'_\beta & L'_p & 0 & L'_r \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ N'_\beta & N'_p & 0 & N'_r \end{bmatrix} \quad (7.8)$$

et pour décrire l'influence des commandes avec comme matrice caractérisant l'avion

$$B = \begin{bmatrix} \frac{Y_{\delta_r}}{V} & \frac{Y_{\delta_q}}{V} \\ L'_{\delta_r} & L'_{\delta_q} \\ 0 & 0 \\ N'_{\delta_r} & N'_{\delta_q} \end{bmatrix} \quad (7.9)$$

L'équation caractéristique, permettant d'identifier les modes propres de l'avion, obtenue à partir de la matrice $[A]$, se présente sous la forme suivante :

$$|\lambda I - A| = \lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda^1 + a_0 \quad (7.10)$$

Pour la plus grande partie des avions, cette équation peut être factorisée, ce qui donne :

$$\underbrace{(\lambda^2 + 2\zeta\omega_n\lambda + \omega_n^2)}_{\text{Roulis hollandais}} \underbrace{(\lambda - \lambda_r)}_{\text{roulis}} \underbrace{(\lambda - \lambda_s)}_{\text{spirale}} \quad (7.11)$$

Cette factorisation fait apparaître trois modes propres de l'avion :

- un mode oscillant amorti connu sous le nom de Roulis Hollandais (Dutch Roll),
- le mode associé au roulis pur,
- le mode spirale.

7.1 Le Roulis Hollandais

Le Roulis Hollandais est le mode propre associé à :

$$(\lambda^2 + 2\zeta\omega_n\lambda + \omega_n^2) \quad (7.12)$$

Les valeurs propres qui lui sont associées sont :

$$\lambda_{\text{DR}} = (-\zeta\omega_n \pm i\omega_d)_{\text{DR}} \quad (7.13)$$

dans le cas du DC-8, l'équation donne :

$$(\lambda^2 + 0.2368\lambda + 2.2437) = 0 \quad (7.14)$$

la valeur propre associée au Roulis Hollandais est alors :

$$\lambda_{\text{DR}} = -0.1184 \pm 1.4932i \quad (7.15)$$

on obtient aussi :

$$\zeta_{\text{DR}} = 0.0791 \quad (7.16)$$

$$\omega_d = 1.4932s^{-1} \quad (7.17)$$

$$\omega_n = 1,4979s^{-1} \quad (7.18)$$

Le vecteur propre associé au Roulis Hollandais est :

$$\begin{pmatrix} \beta \\ p \\ \phi \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.000 & \angle & 0.0\text{deg} \\ 2.412 & \angle & 131,84\text{deg} \\ 1.610 & \angle & 37.30\text{deg} \\ 1.457 & \angle & -86.79\text{deg} \end{pmatrix} \quad (7.19)$$

La représentation du vecteur est donnée sur la figure ??.

L'évolution temporelle des variables d'état de l'avion sont données sur la figure 7.1.

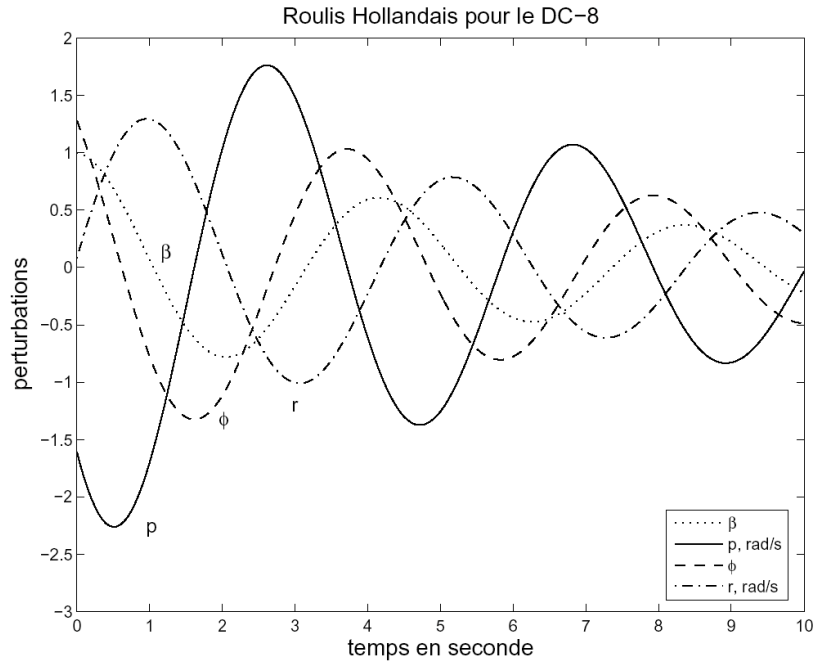


FIGURE 7.1 – Evolution des variables d'état pour le roulis hollandais.

7.2 Le mouvement de roulis pur

La valeur propre associée au roulis pur du DC-8 est :

$$\lambda_r = -1.258 \quad (7.20)$$

Il s'agit du mode non oscillant amorti dont le temps de caractéristique est :

$$\tau_r = 0.795s \quad (7.21)$$

Le vecteur propre qui lui est associé est :

$$\begin{pmatrix} \beta \\ p \\ \phi \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.016 \\ 1.000 \\ -0.795 \\ -0.013 \end{pmatrix} \quad (7.22)$$

La représentation de l'évolution temporelle des variables d'état est présentée sur la figure 7.2. On peut constater que la vitesse roulis décroît très rapidement pour stabiliser l'avion avec un nouvelle angle de roulis. Les variables β et r ont une contribution négligeable dans ce mode.

7.3 Le mode Spirale

La valeur propre associée au mode spirale du DC-8 est :

$$\lambda_s = -0.0040 \quad (7.23)$$

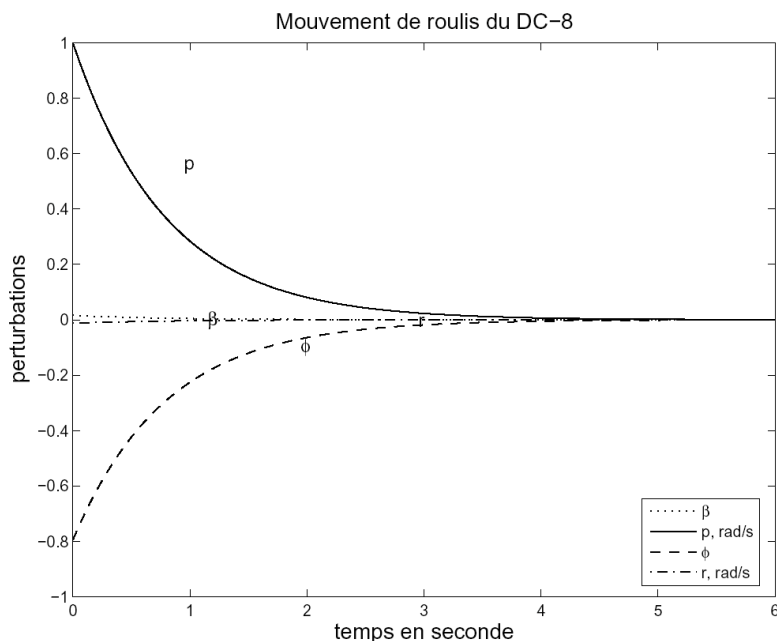


FIGURE 7.2 – Evolution des variables d'état pour le roulis pur.

Le temps caractéristique de ce mode est de :

$$\tau_s = 250.0s \quad (7.24)$$

Le vecteur propre qui lui est associé est :

$$\begin{pmatrix} \beta \\ p \\ \phi \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.004 \\ -0.004 \\ 1.000 \\ 0.039 \end{pmatrix} \quad (7.25)$$

La représentation de l'évolution temporelle des variables d'état est présentée sur la figure 7.3. Nous pouvons constater que la variable principale de ce mode est l'angle de roulis ϕ . La vitesse de lacet r est aussi importante dans ce mode, bien que d'un ordre de grandeur inférieure à ϕ . Le temps caractéristique associé à ce mode étant très grand, de l'ordre de 100 s, l'impact du mode spirale n'est pas ressenti par le pilote. Dans le cas du DC-8, l'avion suit un virage en augmentant lentement, au cours du temps, le rayon de giration, ce qui tend à lui faire quitter son virage. Dans le cas d'un avion instable, l'avion aurait le comportement inverse qui tendrait à lui faire suivre une spirale dont le rayon diminuerait avec le temps.

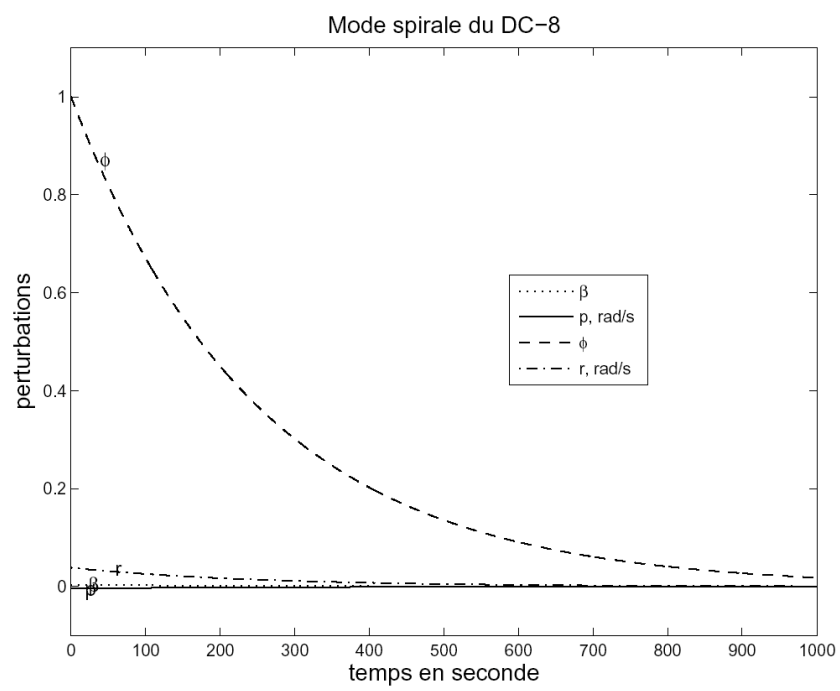


FIGURE 7.3 – Evolution des variables d'état dans le cas du mode spirale.

Annexe A

Atmosphère Standard

TABLE A.1 – Atmosphère Standard

Altitude m	Température K	Pression Pa	Masse volumique kg/m ³	Densité	Vitesse du son m/s
0	288,15	101 326,04	1,2252	1,0000	340,26
200	286,85	98 946,25	1,2019	0,9809	339,49
400	285,55	96 611,93	1,1789	0,9622	338,72
600	284,25	94 322,40	1,1562	0,9437	337,95
800	282,95	92 077,01	1,1339	0,9254	337,18
1000	281,65	89 875,09	1,1119	0,9075	336,40
1200	280,35	87 716,01	1,0902	0,8898	335,63
1400	279,05	85 599,12	1,0688	0,8723	334,85
1600	277,75	83 523,79	1,0478	0,8552	334,07
1800	276,45	81 489,40	1,0271	0,8383	333,28
2000	275,15	79 495,31	1,0067	0,8216	332,50
2200	273,85	77 540,92	0,9866	0,8052	331,71
2400	272,55	75 625,62	0,9668	0,7891	330,92
2600	271,25	73 748,82	0,9473	0,7732	330,13
2800	269,95	71 909,90	0,9282	0,7575	329,34
3000	268,65	70 108,29	0,9093	0,7421	328,55
3200	267,35	68 343,41	0,8907	0,7270	327,75
3400	266,05	66 614,68	0,8724	0,7120	326,95
3600	264,75	64 921,52	0,8544	0,6973	326,15
3800	263,45	63 263,39	0,8367	0,6829	325,35
4000	262,15	61 639,71	0,8193	0,6687	324,55
4200	260,85	60 049,95	0,8021	0,6547	323,74
4400	259,55	58 493,54	0,7852	0,6409	322,94
4600	258,25	56 969,97	0,7686	0,6273	322,13
4800	256,95	55 478,69	0,7523	0,6140	321,31
5000	255,65	54 019,18	0,7362	0,6009	320,50

TABLE A.2 – Atmosphère Standard

Altitude m	Température K	Pression Pa	Masse volumique kg/m ³	Densité	Vitesse du son m/s
5000	255,65	54 019,18	0,7362	0,6009	320,50
5200	254,35	52 590,91	0,7204	0,5880	319,68
5400	253,05	51 193,38	0,7049	0,5753	318,87
5600	251,75	49 826,08	0,6896	0,5628	318,05
5800	250,45	48 488,50	0,6746	0,5506	317,22
6000	249,15	47 180,14	0,6598	0,5385	316,40
6200	247,85	45 900,51	0,6453	0,5267	315,57
6400	246,55	44 649,14	0,6310	0,5150	314,74
6600	245,25	43 425,54	0,6170	0,5035	313,91
6800	243,95	42 229,23	0,6032	0,4923	313,08
7000	242,65	41 059,74	0,5896	0,4812	312,24
7200	241,35	39 916,63	0,5763	0,4703	311,41
7400	240,05	38 799,42	0,5632	0,4596	310,57
7600	238,75	37 707,66	0,5503	0,4491	309,73
7800	237,45	36 640,92	0,5377	0,4388	308,88
8000	236,15	35 598,74	0,5252	0,4287	308,03
8200	234,85	34 580,70	0,5131	0,4187	307,19
8400	233,55	33 586,36	0,5011	0,4090	306,33
8600	232,25	32 615,31	0,4893	0,3994	305,48
8800	230,95	31 667,11	0,4778	0,3899	304,62
9000	229,65	30 741,35	0,4664	0,3807	303,77
9200	228,35	29 837,64	0,4553	0,3716	302,90
9400	227,05	28 955,56	0,4444	0,3627	302,04
9600	225,75	28 094,71	0,4336	0,3539	301,17
9800	224,45	27 254,71	0,4231	0,3453	300,31
10000	223,15	26 435,16	0,4128	0,3369	299,44
10200	221,85	25 635,68	0,4026	0,3286	298,56
10400	220,55	24 855,89	0,3927	0,3205	297,69
10600	219,25	24 095,42	0,3829	0,3125	296,81
10800	217,95	23 353,90	0,3734	0,3047	295,93
11000	216,65	22 630,97	0,3640	0,2971	295,04
11200	216,65	21 929,33	0,3527	0,2878	295,04
11400	216,65	21 248,47	0,3417	0,2789	295,04
11600	216,65	20 588,75	0,3311	0,2703	295,04
11800	216,65	19 949,52	0,3208	0,2619	295,04
12000	216,65	19 330,13	0,3109	0,2537	295,04
12200	216,65	18 729,97	0,3012	0,2459	295,04
12400	216,65	18 148,44	0,2919	0,2382	295,04
12600	216,65	17 584,97	0,2828	0,2308	295,04
12800	216,65	17 039,00	0,2740	0,2237	295,04
13000	216,65	16 509,98	0,2655	0,2167	295,04

TABLE A.3 – Atmosphère Standard

Altitude m	Température K	Pression Pa	Masse volumique kg/m ³	Densité	Vitesse du son m/s
13000	216,65	16 509,98	0,2655	0,2167	295,04
13200	216,65	15 997,38	0,2573	0,2100	295,04
13400	216,65	15 500,69	0,2493	0,2035	295,04
13600	216,65	15 019,43	0,2416	0,1971	295,04
13800	216,65	14 553,11	0,2341	0,1910	295,04
14000	216,65	14 101,27	0,2268	0,1851	295,04
14200	216,65	13 663,46	0,2197	0,1793	295,04
14400	216,65	13 239,24	0,2129	0,1738	295,04
14600	216,65	12 828,19	0,2063	0,1684	295,04
14800	216,65	12 429,90	0,1999	0,1632	295,04
15000	216,65	12 043,98	0,1937	0,1581	295,04
15200	216,65	11 670,04	0,1877	0,1532	295,04
15400	216,65	11 307,71	0,1819	0,1484	295,04
15600	216,65	10 956,63	0,1762	0,1438	295,04
15800	216,65	10 616,45	0,1707	0,1394	295,04
16000	216,65	10 286,83	0,1654	0,1350	295,04
16000	216,65	10 286,83	0,1654	0,1350	295,04
16200	216,65	9 967,45	0,1603	0,1308	295,04
16400	216,65	9 657,98	0,1553	0,1268	295,04
16600	216,65	9 358,12	0,1505	0,1228	295,04
16800	216,65	9 067,57	0,1458	0,1190	295,04
17000	216,65	8 786,05	0,1413	0,1153	295,04
17200	216,65	8 513,26	0,1369	0,1117	295,04
17400	216,65	8 248,94	0,1327	0,1083	295,04
17600	216,65	7 992,83	0,1285	0,1049	295,04
17800	216,65	7 744,67	0,1246	0,1017	295,04
18000	216,65	7 504,21	0,1207	0,0985	295,04
18200	216,65	7 271,23	0,1169	0,0954	295,04
18400	216,65	7 045,47	0,1133	0,0925	295,04
18600	216,65	6 826,72	0,1098	0,0896	295,04
18800	216,65	6 614,77	0,1064	0,0868	295,04
19000	216,65	6 409,39	0,1031	0,0841	295,04
19200	216,65	6 210,40	0,0999	0,0815	295,04
19400	216,65	6 017,58	0,0968	0,0790	295,04
19600	216,65	5 830,75	0,0938	0,0765	295,04
19800	216,65	5 649,71	0,0909	0,0742	295,04
20000	216,65	5 474,30	0,0880	0,0719	295,04

Annexe B

Caractéristiques des différents avions utilisés

B.1 Le Cessna Skylane



FIGURE B.1 – Cessna Skylane

Caractéristiques :

- Envergure : 11 m
- Surface alaire : 16 m²
- Poids au décollage : 1338 kg
- Puissance du moteur au niveau de la mer : $W_u = 230$ hp
- Coefficient de traînée à portance nulle : $C_{D_0} = 0.025$
- Facteur d'efficacité d'Oswald : $e = 0.8$
- Rendement de l'hélice : $\mu_h = 0.8$

B.2 Le Cessna Citation 3



FIGURE B.2 – Cessna Citation 3

Caractéristiques :

- Envergure : 16,25 m
- Surface alaire : 29,5 m²
- Poids au décollage : 8 984 kg
- Quantité de fuel embarquée : 3 384 kg
- Poussée totale des deux moteurs au niveau de la mer : $T_u = 32\,470$ N
- Consommation spécifique : $c = 0.061$ kg/(N.h)
- Coefficient de traînée à portance nulle : $C_{D_0} = 0.02$
- Facteur d'efficacité d'Oswald : $e = 0.81$

B.3 Le Douglas A4D Skyhawk, avion d'attaque de l'US Navy



FIGURE B.3 – Douglas A4D Skyhawk, avion d'attaque de l'US Navy

Les données proposées dans les tables suivantes sont relatives aux conditions de vol normales, pour un avion ayant les caractéristiques suivantes $P = 78.190 \text{ kN}$, $S = 24,15 \text{ m}^2$, $b = 8.38 \text{ m}$ et $c = 3.29 \text{ m}$.

Condition	1	2	3	4	5	6
h (m)	0	4 572	4 572	4 572	10 668	10 668
h(ft)	0	15 000	15 000	15 000	35 000	35 000
M	0,4	0,4	0,6	0,9	0,6	0,9
V (m/s)	136	128	193	290	178	267
Q (N/m ²)	113	64	144	324	60	135
I _x (kg/m ²)	10 872	11 117	10 859	10 927	11 103	10 859
I _y (kg/m ²)	35 113	35 113	35 113	35 113	35 113	35 113
I _z (kg/m ²)	39 682	39 438	39 695	39 628	39 451	39 695
I _{xz} (kg/m ²)	-598	-2 696	55	1 412	-2 646	307
α_{trim} (deg)	4,7	8,9	3,4	0,7	8,8	2,9

TABLE B.1 – Données géométriques

Condition	1	2	3	4	5	6
h (m)	0	4 572	4 572	4 572	10 668	10 668
h(ft)	0	15 000	15 000	15 000	35 000	35 000
M	0,4	0,4	0,6	0,9	0,6	0,9
X_u (s^{-1})	-0,0160	-0,0148	-0,0129	-0,0635	-0,0128	-0,0353
X_α ($m.s^{-2}$)	-0,5309	-3,7978	-1,1341	-13,8013	-6,2819	-14,3377
Z_u (s^{-1})	-0,156	-0,16	-0,104	-0,135	-0,114	-0,12
Z_α ($m.s^{-2}$)	-121,46	-66,93	-158,16	-428,09	-66,54	-178,82
M_u ($m^{-1}.s^{-1}$)	0,0013	0,0016	0,0013	-0,0312	0,0013	-0,0164
M_α (s^{-2})	-10,23	-5,64	-12,97	-35,96	-5,402	-14,99
$M_{\dot{\alpha}}$ (s^{-1})	-0,342	-0,204	-0,353	-0,858	-0,160	-0,389
M_q (s^{-1})	-1,151	-0,670	-1,071	-1,934	-0,484	-0,876
X_{δ_e} ($m.s^{-2}$)	1,2619	0,7772	1,2253	-6,3947	0,8199	-1,8440
Z_{δ_e} ($m.s^{-2}$)	-12,972	-6,992	-17,379	-31,388	-7,233	-13,076
M_{δ_e} (s^{-2})	-13,73	-7,4	-19,46	-33,81	-8,10	-14,80

TABLE B.2 – Dérivées longitudinales dimensionnées

Condition	1	2	3	4	5	6
h (m)	0	4 572	4 572	4 572	10 668	10 668
h(ft)	0	15 000	15 000	15 000	35 000	35 000
M	0,4	0,4	0,6	0,9	0,6	0,9
Y_β ($m.s^{-2}$)	-33,81	-19,02	-44,07	-105,21	-18,40	-42,61
L_β (s^{-2})	-27,67	-14,01	-35	-87,19	-14,24	-40,32
L_p (s^{-1})	-1,732	-0,988	-1,516	-2,492	-0,671	-1,134
L_r (s^{-1})	0,933	0,607	0,874	1,346	0,464	0,672
N_β (s^{-2})	15,16	8,223	18,78	46,23	7,864	19,65
N_p (s^{-1})	0,04	0	0,04	0,125	-0,004	0,041
N_r (s^{-1})	-0,639	-0,401	-0,566	-0,958	-0,291	-0,428
Y_{δ_r} ($m.s^{-2}$)	5,989	3,301	7,647	15,923	3,188	6,639
L_{δ_r} (s^{-1})	7,305	2,802	9,961	24,05	2,739	8,568
N_{δ_r} (s^{-1})	-6,732	-3,651	-8,397	-17,41	-3,517	-7,241
Y_{δ_a} ($m.s^{-2}$)	-0,7921	-0,2423	-0,7343	-1,6127	-0,1457	-0,7376
L_{δ_a} (s^{-1})	17,27	8,757	21,27	37,48	7,998	16,88
N_{δ_a} (s^{-1})	0,334	-0,246	0,479	1,462	-0,139	0,414

TABLE B.3 – Dérivées latérales dimensionnées

B.4 Le McDonnell-Douglas F-4C Phantom II, avion de combat de l'US Air Force



FIGURE B.4 – McDonnell-Douglas F-4C Phantom II, avion de combat de l'US Air Force

Les données proposées dans les tables suivantes sont relatives aux conditions de vol normales, pour un avion ayant les caractéristiques suivantes $P = 173 \text{ kN}$, $S = 49,23 \text{ m}^2$, $b = 11,78 \text{ m}$ et $c = 4,87 \text{ m}$. Le tangage est contrôlé en déplaçant l'ensemble de la partie horizontale de l'empennage arrière.

Condition	1	2	3	4	5	6
Condition	1	2	3	4	5	6
$h \text{ (m)}$	0	4572	10668	10668	10668	13716
$h \text{ (ft)}$	0	15 000	35 000	35 000	35 000	45 000
M	0,8	0,9	0,6	0,9	1,2	1,5
$V \text{ (m/s)}$	272	290	178	267	356	443
$Q \text{ (N/m}^2\text{)}$	454	324	60	136	241	234
$I_x \text{ (kg/m}^2\text{)}$	33 866	33 853	37 093	33 948	33 853	33 948
$I_y \text{ (kg/m}^2\text{)}$	165 657	165 657	165 657	165 657	165 657	165 657
$I_z \text{ (kg/m}^2\text{)}$	189 518	189 532	186 291	189 437	189 532	189 437
$I_{xz} \text{ (kg/m}^2\text{)}$	2 137	1 593	-22 277	-4 112	-1 396	-4 112
$\alpha_{\text{trim}} \text{ (deg)}$	0,3	0,5	9,4	2,6	1,6	2,6

TABLE B.4 – Données géométriques

Condition	1	2	3	4	5	6
h	0	15 000	35 000	35 000	35 000	45 000
h(ft)	0	15 000	35 000	35 000	35 000	45 000
M	0,8	0,9	0,6	0,9	1,2	1,5
X_u (s ⁻¹)	-0,0162	-0,0215	-0,0176	-0,0123	-0,0136	-0,0072
X_α (m.s ⁻²)	-0,2499	-1,8074	-7,3914	-2,2646	-5,0383	-9,1379
Z_u (s ⁻¹)	-0,073	-0,144	-0,116	-0,113	-0,01	-0,012
Z_α (m.s ⁻²)	-419,0	-336,3	-49,4	-144,9	-258,6	-218,5
$Z_{\dot{\alpha}}$ (m.s)	-0,7376	-0,6096	-0,1801	-0,3078	-0,3779	-0,1582
Z_q (m.s)	-2,499	-1,829	-0,555	-0,881	-1,247	-0,683
M_u (m ⁻¹ .s ⁻¹)	-0,00558	-0,01444	-0,00033	-0,00919	0,00722	0,0082
M_α (s ⁻²)	-17,76	-17	-1,927	-7,877	-29,03	-28,94
$M_{\dot{\alpha}}$ (s ⁻¹)	-0,592	-0,457	-0,144	-0,234	-0,288	-0,122
M_q (s ⁻¹)	-1,36	-0,993	-0,307	-0,487	-0,746	-0,488
X_{δ_e} (m.s ⁻²)	0	0	-0,00305	0	-0,00305	0
Z_{δ_e} (m.s ⁻²)	-42,98	-32,63	-6,39	-15,13	-27,57	-21,54
M_{δ_e} (s ⁻²)	-32,3	-25	-4,9	-11,4	-20,7	-16

TABLE B.5 – Dérivées longitudinales dimensionnées

Condition	1	2	3	4	5	6
h	0	15 000	35 000	35 000	35 000	45 000
h(ft)	0	15 000	35 000	35 000	35 000	45 000
M	0,8	0,9	0,6	0,9	1,2	1,5
Y_β (m.s ⁻²)	-91,20	-62,39	-10,07	-24,59	-53,71	-52,21
L_β (s ⁻²)	-27,21	-27,85	-8,25	-17,35	-13,23	-9,98
L_p (s ⁻¹)	-3,034	-2,264	-0,687	-1,223	-1,372	-0,977
L_r (s ⁻¹)	0,876	0,678	0,281	0,409	0,329	0,319
N_β (s ⁻²)	16,03	11,97	2,155	5,403	12,59	10,18
N_p (s ⁻¹)	0,009	0,008	-0,006	-0,032	-0,021	-0,008
N_r (s ⁻¹)	-0,753	-0,541	-0,149	-0,246	-0,403	-0,317
Y_{δ_r} (m.s ⁻²)	12,03	8,15	2,012	3,79	4,69	4,37
L_{δ_r} (s ⁻¹)	7,774	5,286	-0,346	1,503	2,765	1,6
N_{δ_r} (s ⁻¹)	-7,92	-5,666	-1,403	-2,656	-3,251	-2,076
Y_{δ_a} (m.s ⁻²)	-2,025	-1,448	-0,269	-0,606	-1,074	-0,881
L_{δ_a} (s ⁻¹)	22,15	17,48	4,243	9,967	10,93	6,798
N_{δ_a} (s ⁻¹)	0,556	0,447	-0,124	-0,042	0,443	0,215

TABLE B.6 – Dérivées latérales dimensionnées

B.5 Le McDonnell-Douglas DC-8



FIGURE B.5 – McDonnell-Douglas DC-8

Les données proposées dans les tables suivantes correspondent à un avion ayant comme caractéristiques : $S = 241 \text{ m}^2$, $b = 43,37 \text{ m}$ et $c = 7 \text{ m}$. La condition 1 correspond à la phase d'approche qui précède l'atterrissage, la condition 2 à la phase de montée, la condition 3 au vol de croisière et la condition 4 à la vitesse à ne jamais dépasser.

Condition	1	2	3	4
h (m)	0	4 572	10 058	10 058
h(ft)	0	15 000	33 000	33 000
M	0,218	0,443	0,84	0,88
V (m/s)	74	143	251	265
Q (N/m ²)	34	79	130	144
P (kN)	845	845	1023	1023
I _x (kg/m ²)	4 189 218	4 216 333	5 111 117	5 111 117
I _y (kg/m ²)	3 985 858	3 985 858	4 826 413	4 826 413
I _z (kg/m ²)	7 564 996	7 971 716	9 666 384	9 666 384
I _{xz} (kg/m ²)	37 961	-87 445	61 008	72 803
δ_{flap} (deg)	35	0	0	0

TABLE B.7 – Données géométriques

Condition	1	2	3	4
h (m)	0	4 572	10 058	10 58
h(ft)	0	15 000	33 000	33 000
M	0,218	0,443	0,84	0,88
X_u (s ⁻¹)	-0,0291	-0,0071	-0,0014	-0,046
X_α (m.s ⁻²)	4,669	4,581	1,080	-6,815
Z_u (s ⁻¹)	-0,251	-0,133	-0,074	0,062
Z_α (m.s ⁻²)	-46,57	-107,89	-202,48	-227,66
$Z_{\dot{\alpha}}$ (m.s)	0	0	0	0
Z_q (m.s)	0	0	0	0
M_u (m ⁻¹ .s ⁻¹)	0	0	-0,0026	-0,0082
M_α (s ⁻²)	-2,12	-5,01	-9,15	-12,00
$M_{\dot{\alpha}}$ (s ⁻¹)	-0,260	-0,337	-0,420	-0,449
M_q (s ⁻¹)	-0,792	-0,991	-0,924	-1,008
X_{δ_e} (m.s ⁻²)	0	0	0	0
Z_{δ_e} (m.s ⁻²)	-3,100	-7,224	-10,574	-11,905
M_{δ_e} (s ⁻²)	-1,351	-3,241	-4,589	-5,12

TABLE B.8 – Dérivées longitudinales dimensionnées

Condition	1	2	3	4
h	0	4 572	10 058	10 058
h(ft)	0	15 000	33 000	33 000
M	0,218	0,443	0,84	0,88
Y_β (m.s ⁻²)	-8,244	-14,384	-21,863	-24,774
L_β (s ⁻²)	-1,334	-2,684	-4,449	-5,111
L_p (s ⁻¹)	-0,949	-1,234	-1,184	-1,299
L_r (s ⁻¹)	0,611	0,391	0,337	0,352
N_β (s ⁻²)	0,762	1,272	2,175	2,597
N_p (s ⁻¹)	-0,119	-0,048	-0,013	-0,008
N_r (s ⁻¹)	-0,268	-0,253	-0,231	-0,254
Y_{δ_r} (m.s ⁻²)	1,762	4,106	5,602	6,203
L_{δ_r} (s ⁻¹)	0,185	0,375	0,591	0,639
N_{δ_r} (s ⁻¹)	-0,389	-0,861	-1,173	-1,298
Y_{δ_a} (m.s ⁻²)	0	0	0	0
L_{δ_a} (s ⁻¹)	0,725	1,622	2,12	2,329
N_{δ_a} (s ⁻¹)	0,05	0,036	0,052	0,062

TABLE B.9 – Dérivées latérales dimensionnées

B.6 Le Lockheed JetStar



FIGURE B.6 – Le Lockheed Jetstar

Les dérivées de stabilité fournies dans ces tableaux correspondent à un avion ayant les caractéristiques suivantes : $S = 50,4 \text{ m}^2$, $b = 13,38 \text{ m}$, $c = 3,33 \text{ m}$. La condition 1 correspond à un avion en phase d'approche, trains d'atterrissage sortis, volets à 40% avec un poids de 106 N. Les conditions 2 à 6 correspondent à des phases normales de vol pour un poids d'avion de 170 N.

Condition	1	2	3	4	5	6
h (m)	0	0	6 096	6 096	12 192	12 192
h(ft)	0	0 20 000	20 000	40 000	40 000	
M	0,2	0,4	0,55	0,75	0,65	0,8
V (m/s)	68	136	174	237	192	236
Q (N/m ²)	28	113	99	183	56	84
I _x (kg/m ²)	57 686	160 899	161 007	160 763	161 888	160 939
I _y (kg/m ²)	170 972	184 217	184 217	184 217	184 217	184 217
I _z (kg/m ²)	216 687	330 284	330 175	330 420	329 294	330 243
I _{xz} (kg/m ²)	-10 743	-4 973	-6 451	-831	-13 799	-5 564
α_{trim} (deg)	6,5	4	4,5	2,6	7	4,2

TABLE B.10 – Données géométriques

Condition	1	2	3	4	5	6
h	0	0	6 096	6 096	12 192	12 192
h(ft)	0	0 20 000	20 000	40 000	40 000	
M	0,2	0,4	0,55	0,75	0,65	0,8
X_u (s ⁻¹)	-0,0369	-0,0121	-0,0086	-0,0162	-0,0076	-0,0042
X_α (m.s ⁻²)	-0,1957	4,3739	4,0234	2,1909	-1,4551	-5,1755
Z_u (s ⁻¹)	-0,3	-0,154	-0,12	-0,085	-0,104	-0,085
Z_α (m.s ⁻²)	-67,36	-168,52	-152,86	-315,13	-89,98	-156,00
M_u (m ⁻¹ .s ⁻¹)	0,00065	-0,00164	0	-0,00394	0,00032	-0,01574
M_α (s ⁻²)	-2,232	-6,522	-6,12	-12,72	-3,561	-5,629
$M_{\dot{\alpha}}$ (s ⁻¹)	-0,205	-0,38	-0,276	-0,447	-0,15	-0,217
M_q (s ⁻¹)	-0,546	1,03	-0,724	-1,09	-0,38	-0,506
X_{δ_e} (m.s ⁻²)	0,00305	-0,00030	0,00274	0,00061	-0,00122	-0,00030
Z_{δ_e} (m.s ⁻²)	-5,276	-13,201	-11,467	22,427	-6,663	-10,574
M_{δ_e} (s ⁻²)	-2,26	-8,38	-7,47	-14,6	-4,27	-6,78

TABLE B.11 – Dérivées longitudinales dimensionnées

Condition	1	2	3	4	5	6
h	0	0	6 096	6 096	12 192	12 192
h(ft)	0	0 20 000	20 000	40 000	40 000	
M	0,2	0,4	0,55	0,75	0,65	0,8
Y_β (m.s ⁻²)	-9,528	-23,823	-20,687	-39,587	-11,854	-18,437
L_β (s ⁻²)	-3,539	-4,914	-4,048	-4,639	-2,516	-1,972
L_p (s ⁻¹)	-1,81	-1,297	-0,932	-1,341	-0,487	-0,634
L_r (s ⁻¹)	0,655	0,245	0,176	0,135	0,132	0,089
N_β (s ⁻²)	1,598	3,584	3,247	5,836	1,981	2,784
N_p (s ⁻¹)	-0,151	-0,111	-0,078	-0,091	-0,049	-0,041
N_r (s ⁻¹)	-0,207	-0,263	-0,18	-0,252	-0,102	-0,12
Y_{δ_r} (m.s ⁻²)	2,314	5,773	5,023	8,793	2,762	3,825
L_{δ_r} (s ⁻¹)	0,887	1,421	1,208	2,293	0,58	1,079
N_{δ_r} (s ⁻¹)	-0,715	-1,896	-1,63	-2,762	-0,896	-1,227
Y_{δ_a} (m.s ⁻²)	0	0	0	0	0	0
L_{δ_a} (s ⁻¹)	2,148	3,118	2,853	5,82	1,662	2,619
N_{δ_a} (s ⁻¹)	-0,147	-0,249	-0,246	-0,312	-0,22	-0,221

TABLE B.12 – Dérivées latérales dimensionnées